OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1903. N° 3

# OM MIDDELFEJLSBESTEMMELSEN VED RELATIVE PENDULMAALINGER

## MED DEN DANSKE GRADMAALINGS SCHNEIDERSKE APPARAT N° 14

AF

GENERALMAJOR ZACHARIAE

(MEDDELT I MØDET DEN 6. MARTS 1903)

Med Hensyn til Beskrivelse af Apparatet og Fremgangsmaaden ved Maalingerne kunde jeg nok indskrænke mig til at henvise til min Meddelelse i Mødet den 27. November 1896, som er gengivet i „Oversigten" for 1897 S. 139—175, men det turde dog være rigtigt i denne Sammenhæng at forudskikke nogle Bemærkninger om Sagen.

Apparatet har 3 Penduler, hvis Svingningstid er lidt over 0.5, i Gennemsnit omtrent 0.508 Sekunder Stjernetid. En *Række* bestaaer af 3 Maalinger, en med hvert af de 3 Penduler. Paa hver Station udføres flere saadanne Rækker — siden 1899 i Reglen 4. Disse 4 Rækker fordeles ligeligt paa et Døgn og omsluttes af Tidsbestemmelser, den ene umiddelbart før Maalingernes Begyndelse, den anden umiddelbart efter deres Afslutning. I Reglen har disse Tidsbestemmelser bestaaet i Overføring af Tiden ad telegrafisk Vej fra Kjøbenhavns Observatorium til vedkommende Station, og i saa Tilfælde er der ofte midt imellem de to ovenfor nævnte Tidsoverføringer udført en tredie, saaledes at de 4 Rækker deles i 2 *Grupper*, en Daggruppe og en Natgruppe, hver à 2 Rækker og adskilte ved den mellemfaldende Tidsoverføring. Tidsoverføringerne tjene til at bestemme Observationsuhrets Gang i Mellemtiden, og ved 3 Tidsoverføringer bliver der altsaa to Bestemmelser af Gangen, hvoraf den ene baseres paa Tidsoverføringerne Nr. 1 og 2 og gælder for første Gruppe, medens den anden baseres paa Tidsoverføringerne Nr. 2 og 3 og gælder for anden Gruppe.

Den sidst beskrevne Fremgangsmaade er benyttet paa 19 af de Stationer, hvorpaa der i 1901 er udført Pendulmaalinger, og som vi skulle behandle i det Følgende med særligt Hensyn til en Bestemmelse af Middelfejlene paa de opnaaede Resultater. Det bemærkes, at den midterste Tidsoverføring ikke bidrager til at forbedre Stationsresultatet, som bliver ganske uafhængig af den, men den har Betydning som Kontrol og som et Middel til at bestemme de overførte Tidsangivelsers Nøjagtighed og Størrelsen af deres Bidrag til Stationsresultatets Middelfejl.

## I.

Paa hver enkelt af de paagældende 19 Stationer falder Maalingerne som ovenfor omtalt i 2 Grupper, en Daggruppe og en Natgruppe, nemlig

Tidsoverføring,<br>
2 Rækker à 3 Penduler, } 1ste Gruppe.<br>
Tidsoverføring,<br>
2 Rækker à 3 Penduler, } 2den Gruppe.<br>
Tidsoverføring.

I de fleste Tilfælde falder 1ste Gruppe sammen med Daggruppen, men paa de 3 Stationer, Aagerup, Odense og Fjelsted, er man begyndt med Natgruppen.

Betegner $S$ Middeltallet af Svingningstiderne for en Række paa 3 Penduler, medens $d$ og $D$ ere Differenserne henholdsvis mellem de to Rækkeresultater indenfor samme Gruppe og de to Grupperesultater paa Stationen, haves Skemaet:

| Række-resultat. | Differens. | Grupperesultat. | Differens. | Stationsresultat. |
|---|---|---|---|---|
| $S$ | $d$ | $\frac{1}{2}(S+S_1)$ | $D$ | $\frac{1}{4}(S+S_1+S'+S'_1)$ |
| $S_1$ | | | | |
| $S'$ | $d'$ | $\frac{1}{2}(S'+S'_1)$ | | |
| $S'_1$ | | | | |

idet Adskillelsen mellem Rækkerne er gjort ved Mærke forneden, og Adskillelsen mellem Grupperne ved Mærke foroven, hvilket sidste er tillagt Natgruppen. Tidsbestemmelserne er udført ved telegrafisk Overførelse af Tiden fra Kjøbenhavn og have Fejl, hvis Indflydelse paa $S$'erne betegnes ved (1), (2) og (3). Idet Resultaterne af de andre Kilder til Fejl paa $S$'erne foreløbig betegnes ved $a$ med behørigt Mærke, vil der til det anførte Observationsskema svare nedenstaaende Fejlskema:

| Rækkefejl. | Differens. | Gruppefejl. | Differens. | Stationsfejl. |
|---|---|---|---|---|
| $a+(1)-(2)$ | $a-a_1$ | $\frac{1}{2}(a+a_1)+(1)-(2)$ | $\frac{1}{2}(a+a_1)-\frac{1}{2}(a'+a'_1)$ | $\frac{1}{4}(a+a_1+a'+a'_1)$ |
| $a_1+(1)-(2)$ | | | $+(1)-2(2)+(3)$ | $+\frac{1}{2}((1)-(3))$ |
| $a'+(2)-(3)$ | $a'-a'_1$ | $\frac{1}{2}(a'+a'_1)+(2)-(3)$ | | |
| $a'_1+(2)-(3)$ | | | | |

Naar nu Middelværdierne af $d^2$ og $D^2$ betegnes ved $(d)^2$ og $(D)^2$, Middelfejlene svarende til Fejlene $a$ og $a'$ ved $(a)$ og $(a')$, Middelfejlen svarende til Fejlene (1), (2) og (3) ved $(\tau)$, Middelfejlen paa Stationsresultatet ved $\mu$, erholdes umiddelbart:

$$2(a)^2 = (d)^2; \quad 2(a')^2 = (d')^2;$$

$$\tfrac{1}{2}((a)^2+(a')^2)+6(\tau)^2 = (D)^2; \quad \mu^2 = \tfrac{1}{8}((a)^2+(a')^2)+\tfrac{1}{2}(\tau)^2.$$

Ved Anvendelsen af disse Formler bemærkes, at man ikke blot opnaar en lettere Regning, men ogsaa undgaar Ophobning af Afrundingsfejl, ved at begynde med at beregne de enkelte Værdier af $2D$ og $4D^2$ og først derefter gaa over til Beregningen af Middelværdien $(D)^2$.

Af en enkelt Station kan man naturligvis ikke uddrage tilnærmelsesvis paalidelige Resultater; saadanne faaes kun ved at sammendrage et større Antal Stationer til et Middelresultat, og jo flere Stationer, der indgaa i dette, desto bedre. Exempelvis ville vi anvende Formlerne paa 3 saadanne Middelresultater, sammensatte af 19 udenfor Kjøbenhavn i 1901 maalte Stationer, idet disse ikke blot behandles under et, men tillige opløste i 2 Grupper, den ene bestaaende af 9 Stationer, der alle ligge paa Sjælland, den anden af 10 Stationer, hvoraf 9 paa Fyen og 1 i Jylland. Her følger en summarisk Oversigt over de hermed forbundne Regninger, hvorved de opførte Talværdier svare til Gennemsnitsresultaterne af Apparatets 3 Penduler og ere angivne i Enheder af 7de Decimalsted.

*A. De 9 Sjællandske Stationer.*

| Nr. | Station. | $d$ | $d^2$ | $d'$ | $d'^2$ | $2D$ | $4D^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aagerup .... | 0 | 0 | 9 | 81 | — 39 | 1521 |
| 2 | Tudse ...... | 0 | 0 | 16 | 256 | 48 | 2304 |
| 3 | Svinninge ... | — 21 | 441 | 1 | 1 | — 38 | 1444 |
| 4 | Faarevejle... | 1 | 1 | 13 | 169 | 44 | 1936 |
| 5 | Jyderup ..... | 9 | 81 | 7 | 49 | 12 | 144 |
| 6 | Viskinde .... | 17 | 289 | 26 | 676 | — 13 | 169 |
| 7 | Refsnæs..... | 23 | 529 | 21 | 441 | — 54 | 2916 |
| 8 | Kalundborg.. | — 23 | 529 | — 2 | 4 | 63 | 3969 |
| 9 | Korsør ...... | 19 | 361 | — 18 | 324 | — 15 | 225 |
| | Numerisk Sum | 113 | 2231 | 113 | 2001 | 326 | 14628 |
| | Middelresultat | 12.6 | 247.9 | 12.6 | 222.3 | 36.2 | 1625.3 |

$(D)^2 = 406.3$

*B. De 10 Fyensk-Jydske Stationer.*

| Nr. | Station. | $d$ | $d^2$ | $d'$ | $d'^2$ | $2D$ | $4D^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Nyborg...... | 2 | 4 | 5 | 25 | −5 | 25 |
| 11 | Ullerslev .... | 2 | 4 | 11 | 121 | −51 | 2601 |
| 12 | Kjerteminde . | −5 | 25 | 3 | 9 | 78 | 6084 |
| 13 | Marslev ..... | −14 | 196 | 5 | 25 | −7 | 49 |
| 14 | Odense ..... | −3 | 9 | 13 | 169 | 70 | 4900 |
| 15 | Ubberud .... | 5 | 25 | −14 | 196 | −73 | 5329 |
| 16 | Vissenbjerg.. | 5 | 25 | −2 | 4 | 45 | 2025 |
| 17 | Fjelsted..... | 14 | 196 | −8 | 64 | −42 | 1764 |
| 18 | Kavslunde... | −8 | 64 | 12 | 144 | 56 | 3136 |
| 19 | Hansted (Jyll.) | 3 | 9 | −9 | 81 | −66 | 4356 |
| | Numerisk Sum | 61 | 557 | 82 | 838 | 493 | 30269 |
| | Middelresultat | 6.1 | 55.7 | 8.2 | 83.8 | 49.3 | 3026.9 |

$(D)^2 = 756.7$

*C. Alle 19 Stationer.*

| 19 Stationer. | $d$ | $d^2$ | $d'$ | $d'^2$ | $2D$ | $4D^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Numerisk Sum ... | 174 | 2788 | 195 | 2839 | 819 | 44897 |
| Middelresultat.... | 9.2 | 146.7 | 10.3 | 149.4 | 43.1 | 2363.0 |

$(D)^2 = 590.8$

Man ser, at Forskellen mellem $d$ og $d'$ er ganske forsvindende i Sammenligning med Bestemmelsens Middelfejl, og der er derfor ved Beregningen af Middelfejlen ikke Anledning til at gøre Forskel paa Daggruppen og Natgruppen, hvorfor da ovenstaaende Formler kunne skrives:

$$(a')^2 = (a)^2 = \tfrac{1}{4}\left((d)^2 + (d')^2\right); \quad 6(\tau)^2 = (D)^2 - (a)^2;$$
$$\mu^2 = \tfrac{1}{4}(a)^2 + \tfrac{1}{2}(\tau)^2,$$

som giver de i omstaaende Oversigt opførte Resultater.

| Stations-gruppe. | $(a)^2$ | $(a)$ | $(\tau)^2$ | $(\tau)$ | $\mu^2$ | $\mu$ | Antal Stationer. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A ......... | 117.6 | 10.8 | 48.1 | 6.9 | 53.4 | 7.3 | 9 |
| B ......... | 34.9 | 5.9 | 120 3 | 11.0 | 68.9 | 8.3 | 10 |
| C ......... | 74.0 | 8.6 | 86.1 | 9.3 | 61.6 | 7.8 | 19 |

Da Svingningstiden er omtrent 0.508 Sekunder, vil Intervallet $12^h = 43200^s$ mellem Tidsbestemmelserne udgøre omtrent 85000 Gange Svingningstiden, og altsaa vil den til $(\tau)$ svarende Middelfejl $\tau$ paa en Tidsbestemmelse være

$$\tau = \frac{85000}{10^7} \cdot (\tau) = 0^s.0085\,(\tau),$$

hvoraf da atter med Gennemsnitsværdien 9.3 for $(\tau)$ følger

$$\tau = 0^s.079,$$

eller Middelfejlen paa Uhrets Gang $= 0^s.079\sqrt{2} = 0^s.112$, hvilke Fejl efter deres Bestemmelsesmaade ere for store. Det er nemlig tydeligt, at af Udtrykket $d = a - a_1$ udgaar ikke alene Tidsbestemmelsens Fejl, men muligvis ogsaa andre Partielfejl, nemlig saadanne, som indgaa med samme Værdi, $x$, i $a$ og $a_1$. Men Følgen af en saadan fælles Fejl $x$ paa de to Værdier for samme Pendul i en Gruppe vil være, at Gruppefejlen forøges med $x$, og antages det, at $x$ varierer fra Gruppe til anden, kan denne Fejl betegnes ved $x$ og $x'$ henholdsvis for Dag- og Natgruppens Vedkommende. Naar da (1), (2) og (3) og den tilsvarende Middelfejl $(\tau)$ udelukkende skal skyldes Tidsbestemmelsen, maa Udtrykket for $D$ forøges med $x - x'$ og for $(D)^2$ altsaa med $2\,(x)^2$, idet $(x)$ betegner den til Fejlene $x$ og $x'$ svarende Middelfejl. Istedenfor Ligningen $6\,(\tau)^2 = (D)^2 - (a)^2$ erholder man da

$$6\,(\tau)^2 + 2\,(x)^2 = (D)^2 - (a)^2,$$

og de ovenfor erholdte Talværdier for $(\tau)^2$ ere altsaa for store, idet de ikke angive $(\tau)^2$, men $(\tau)^2 + \frac{1}{3}(x)^2$.

En anden Følge af Tilstedeværelsen af den fælles Fejl $x$ for de to Rækker i en Gruppe er, at den ovenfor beregnede Værdi for Middelfejlen $\mu$ paa Stationsresultatet er for lille. Naar nemlig $(\tau)$ kun refererer sig til selve Tidsoverførelsen, skal Stationsresultatets Fejl forøges med $\frac{1}{2}(x+x')$, og Udtrykket for $\mu^2$ bliver derfor

$$\mu^2 = \frac{(a)^2}{4} + \frac{(\tau)^2}{2} + \frac{(x)^2}{2}.$$

Da nu det ovenfor beregnede $(\tau)^2$ har Værdien $(\tau)^2 + \frac{1}{3}(x)^2$, skal den dertil svarende beregnede Værdi for $\mu^2$ forøges med $\frac{1}{3}(x)^2$ for at give samme Værdi som det sidst anførte Udtryk for $\mu^2$. Hvis exempelvis $(x)^2$ for Middelstationen i ovenstaaende ved C betegnede Tilfælde var lig 50.7, vilde de beregnede Værdier

$$(\tau)^2 = 86.1 \text{ og } \mu^2 = 61.6; \quad (\tau) = 9.3 \text{ og } \mu = 7.8$$

forandres til

$$(\tau)^2 = 69.2 \text{ og } \mu^2 = 78.5; \quad (\tau) = 8.3 \text{ og } \mu = 8.9,$$

medens den tidligere bestemte Værdi $0^s.112$ for Middelfejlen paa Gangen reduceres til $0^s.100$, altsaa med omtrent $\frac{1}{9}$ af dens Beløb.

## II.

De sidst anførte Værdier for $\mu$ og $(\tau)$ bero paa en supponeret Værdi for $(x)^2$, men dette er kun tilsyneladende; i Virkeligheden er $(x)^2$ bestemt ved en Beregning, hvortil Resultaterne af de enkelte Penduler frembyde Midler. Lader man $(a)$, $(d)$, $(D)$ og $(x)$ ligesom ovenfor svare til Middelpendulet, og betegnes de tilsvarende Størrelser for de enkelte Penduler ved $(\alpha)$, $(\delta)$, $(\Delta)$ og $(\xi)$ med Index 1, 3 og 5 henholdsvis for Pendul 51, 53 og 55, saa har man aabenbart for Fejlene

$$a = \tfrac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5), \quad d = \tfrac{1}{3}(\delta_1 + \delta_3 + \delta_5), \quad x = \tfrac{1}{3}(\xi_1 + \xi_3 + \xi_5)$$

og for Middelfejlskvadraterne

$$(a)^2 = \tfrac{1}{3}(\alpha)^2, \quad (d)^2 = \tfrac{1}{3}(\delta)^2, \quad (x)^2 = \tfrac{1}{3}(\xi)^2,$$

idet man sætter

$$(\alpha)^2 = \tfrac{1}{3}((\alpha_1)^2 + (\alpha_3)^2 + (\alpha_5)^2), \quad (\delta)^2 = \tfrac{1}{3}((\delta_1)^2 + (\delta_3)^2 + (\delta_5)^2),$$
$$(\xi)^2 = \tfrac{1}{3}((\xi_1)^2 + (\xi_3)^2 + (\xi_5)^2).$$

Størrelserne $(\alpha)^2$, $(\delta)^2$ og $(\xi)^2$ ere altsaa Gennemsnitsværdier for de tilsvarende Kvadrater ved de 3 Penduler. Da nu $(\tau)$ er ens for alle 3 Penduler i en Række, saa har man de 3 Udtryk

$$6(\tau)^2 + 2(\xi_1)^2 = (\varDelta_1)^2 - (\alpha_1)^2,$$
$$6(\tau)^2 + 2(\xi_3)^2 = (\varDelta_3)^2 - (\alpha_3)^2,$$
$$6(\tau)^2 + 2(\xi_5)^2 = (\varDelta_5)^2 - (\alpha_5)^2,$$

der med de forklarede Betegnelser kunne sammenfattes til Gennemsnitsligningen

$$6(\tau)^2 + 2(\xi)^2 = (\varDelta)^2 - (\alpha)^2$$

eller, naar $(\xi)^2$ ombyttes med $3(x)^2$,

$$6(\tau)^2 + 6(x)^2 = (\varDelta)^2 - (\alpha)^2,$$

hvilken Ligning i Forbindelse med den til Middelpendulet svarende

$$6(\tau)^2 + 2(x)^2 = (D)^2 - (a)^2$$

giver

$$(x)^2 = \tfrac{1}{4}(\lambda - l) \quad \text{og} \quad (\tau)^2 = \tfrac{1}{4}l - \tfrac{1}{12}\lambda,$$

idet man har indført Betegnelserne $\lambda$ og $l$, bestemte ved

$$\lambda = (\varDelta)^2 - (\alpha)^2 \quad \text{og} \quad l = (D)^2 - (a)^2.$$

Til Beregningen efter disse Formler uddrages af Observationsjournalerne hosstaaende summariske Oversigter svarende til de enkelte Penduler, og som ere analoge med de tidligere for Middelpendulet anførte.

## *A. De 9 Sjællandske Stationer.*

| Nr. | Station. | $\delta$ | $\delta^2$ | $\delta'$ | $\delta'^2$ | $2\Delta$ | $4\Delta^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Pendul 51.** | | | | | | |
| 1 | Aagerup .... | — 9 | 81 | 1 | 1 | — 18 | 324 |
| 2 | Tudse....... | 22 | 484 | 39 | 1521 | 71 | 5041 |
| 3 | Svinninge ... | — 32 | 1024 | — 4 | 16 | — 38 | 1444 |
| 4 | Faarevejle... | 26 | 676 | 15 | 225 | 97 | 9409 |
| 5 | Jyderup..... | 19 | 361 | 48 | 2304 | 15 | 225 |
| 6 | Viskinde .... | 37 | 1369 | 34 | 1156 | — 7 | 49 |
| 7 | Refsnæs..... | 47 | 2209 | 82 | 6724 | — 23 | 529 |
| 8 | Kalundborg.. | — 46 | 2116 | 1 | 1 | 13 | 169 |
| 9 | Korsør...... | 29 | 841 | — 17 | 289 | — 34 | 1156 |
| | Numerisk Sum | 267 | 9161 | 241 | 12237 | 316 | 18346 |
| | Middelresultat | 29.7 | 1017.9 | 26.8 | 1359.7 | 35.1 | 2038.4 |
| | **Pendul 53.** | | | | | | |
| 1 | Aagerup .... | — 2 | 4 | 14 | 196 | — 2 | 4 |
| 2 | Tudse ...... | — 34 | 1156 | — 16 | 256 | 58 | 3364 |
| 3 | Svinninge ... | — 7 | 49 | 4 | 16 | — 87 | 7569 |
| 4 | Faarevejle... | — 13 | 169 | 10 | 100 | 65 | 4225 |
| 5 | Jyderup..... | — 11 | 121 | 0 | 0 | 5 | 25 |
| 6 | Viskinde .... | 9 | 81 | 28 | 784 | — 17 | 289 |
| 7 | Refsnæs..... | — 1 | 1 | 2 | 4 | — 29 | 841 |
| 8 | Kalundborg.. | — 6 | 36 | — 30 | 900 | 100 | 10000 |
| 9 | Korsør...... | 39 | 1521 | — 29 | 841 | 14 | 196 |
| | Numerisk Sum | 122 | 3138 | 133 | 3097 | 377 | 26513 |
| | Middelresultat | 13.6 | 348.7 | 14.8 | 344.1 | 41.9 | 2945.9 |
| | **Pendul 55.** | | | | | | |
| 1 | Aagerup .... | 11 | 121 | 14 | 196 | — 95 | 9025 |
| 2 | Tudse ...... | 10 | 100 | 26 | 676 | 14 | 196 |
| 3 | Svinninge ... | — 26 | 676 | 1 | 1 | 11 | 121 |
| 4 | Faarevejle .. | — 10 | 100 | 16 | 256 | — 28 | 784 |
| 5 | Jyderup..... | 20 | 400 | — 27 | 729 | 13 | 169 |
| 6 | Viskinde .... | 5 | 25 | 16 | 256 | — 15 | 225 |
| 7 | Refsnæs..... | 24 | 576 | — 22 | 484 | —110 | 12100 |
| 8 | Kalundborg.. | — 16 | 256 | 22 | 484 | 78 | 6084 |
| 9 | Korsør...... | — 12 | 144 | — 8 | 64 | — 26 | 676 |
| | Numerisk Sum | 134 | 2398 | 152 | 3146 | 390 | 29380 |
| | Middelresultat | 14.9 | 266.4 | 16.9 | 349.6 | 43.3 | 3264.4 |
| | **Alle 3 Penduler** | | | | | | |
| | Gennemsnit...... | 19.4 | 544.3 | 19.5 | 684.5 | 40.1 | 2749.6 |

Heraf og af Oversigten A Side 452 har man

$(a)^2 = 307.2, \quad \lambda = 380.2, \quad (a)^2 = 117.6$ og $l = 288.8,$

hvoraf atter ved de Side 456 anførte Udtryk for $(x)^2$ og $(\tau)^2$ erholdes

$$(x)^2 = 22.9 \quad \text{og} \quad (\tau)^2 = 40.5$$

og
$$(x) = 4.8\,, \qquad (\tau) = 6.4 \quad \text{og} \quad \tau = 0^s.054.$$

### *B. De 10 Fyensk-Jydske Stationer.*

| Nr. | Station. | $\delta$ | $\delta^2$ | $\delta'$ | $\delta'^2$ | $2\Delta$ | $4\Delta^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Pendul 51.** | | | | | | |
| 10 | Nyborg ...... | 0 | 0 | −16 | 256 | 22 | 484 |
| 11 | Ullerslev .... | 2 | 4 | 13 | 169 | − 39 | 1521 |
| 12 | Kjerteminde . | − 4 | 16 | 6 | 36 | 16 | 256 |
| 13 | Marslev ..... | 3 | 9 | − 3 | 9 | 84 | 7056 |
| 14 | Odense ..... | − 2 | 4 | 8 | 64 | 72 | 5184 |
| 15 | Ubberud .... | 0 | 0 | −12 | 144 | −146 | 21316 |
| 16 | Vissenbjerg . . | 26 | 676 | 11 | 121 | − 17 | 289 |
| 17 | Fjelsted ..... | 20 | 400 | 12 | 144 | − 88 | 7744 |
| 18 | Kavslunde . . . | −14 | 196 | 60 | 3600 | 34 | 1156 |
| 19 | Hansted ..... | 19 | 361 | 20 | 400 | − 59 | 3481 |
| | Numerisk Sum | 90 | 1666 | 161 | 4943 | 577 | 48487 |
| | Middelresultat | 9.0 | 166.6 | 16.1 | 494.3 | 57.7 | 4848.7 |
| | **Pendul 53.** | | | | | | |
| 10 | Nyborg ...... | − 5 | 25 | 20 | 400 | −27 | 729 |
| 11 | Ullerslev .... | 6 | 36 | 24 | 576 | −54 | 2916 |
| 12 | Kjerteminde . | 16 | 256 | 8 | 64 | 76 | 5776 |
| 13 | Marslev ..... | −40 | 1600 | 14 | 196 | −40 | 1600 |
| 14 | Odense ..... | 2 | 4 | 15 | 225 | 69 | 4761 |
| 15 | Ubberud .... | 5 | 25 | − 2 | 4 | −25 | 625 |
| 16 | Vissenbjerg . . | 0 | 0 | −28 | 784 | 130 | 16900 |
| 17 | Fjelsted ..... | 36 | 1296 | −32 | 1024 | 18 | 324 |
| 18 | Kavslunde . . . | − 6 | 36 | − 6 | 36 | 42 | 1764 |
| 19 | Hansted ..... | −12 | 144 | − 9 | 81 | −81 | 6561 |
| | Numerisk Sum | 128 | 3422 | 158 | 3390 | 562 | 41956 |
| | Middelresultat | 12.8 | 342.2 | 15.8 | 339.0 | 56.2 | 4195.6 |
| | **Pendul 55.** | | | | | | |
| 10 | Nyborg ...... | 10 | 100 | 12 | 144 | −10 | 100 |
| 11 | Ullerslev .... | − 2 | 4 | − 5 | 25 | −61 | 3721 |
| 12 | Kjerteminde . | 4 | 16 | − 4 | 16 | 140 | 19600 |
| 13 | Marslev ..... | − 4 | 16 | 4 | 16 | −64 | 4096 |
| 14 | Odense ..... | − 8 | 64 | 15 | 225 | 69 | 4761 |
| 15 | Ubberud .... | 10 | 100 | −28 | 784 | −44 | 1936 |
| 16 | Vissenbjerg . . | −11 | 121 | 10 | 100 | 23 | 529 |
| 17 | Fjelsted ..... | −13 | 169 | − 2 | 4 | −57 | 3249 |
| 18 | Kavslunde . . . | − 4 | 16 | −20 | 400 | 92 | 8464 |
| 19 | Hansted ..... | 3 | 9 | −38 | 1444 | −57 | 3249 |
| | Numerisk Sum | 69 | 615 | 138 | 3158 | 617 | 49705 |
| | Middelresultat | 6.9 | 61.5 | 13.8 | 315.8 | 61.7 | 4970.5 |
| | **Alle 3 Penduler.** | | | | | | |
| | Gennemsnit ...... | 9.6 | 190.1 | 15.2 | 383.0 | 58.5 | 4671.6 |

Heraf og af Oversigten B Side 453 erholdes

$(a)^2 = 143.3, \quad \lambda = 1024.6, \quad (a)^2 = 34.9 \quad$ og $\quad l = 721.9$

og derefter af Udtrykkene Side 456 for $(x)^2$ og $(\tau)^2$

$$(x)^2 = 75.7 \quad \text{og} \quad (\tau)^2 = 95.1,$$
$$(x) = 8.7, \quad (\tau) = 9.8 \quad \text{og} \quad \tau = 0^s.083.$$

*C. Alle 19 Stationer.*

| Station. | $\delta$ | $\delta^2$ | $\delta'$ | $\delta'^2$ | $2\Delta$ | $4\Delta^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Pendul 51.** | | | | | | |
| Numerisk Sum... | 357 | 10827 | 402 | 17180 | 893 | 66833 |
| Middelresultat ... | 18.8 | 569.8 | 21.2 | 904.2 | 47.0 | 3517.5 |
| **Pendul 53.** | | | | | | |
| Numerisk Sum ... | 250 | 6560 | 291 | 6487 | 939 | 68469 |
| Middelresultat.... | 13.2 | 345.3 | 15.3 | 341.4 | 49.4 | 3603.6 |
| **Pendul 55.** | | | | | | |
| Numerisk Sum ... | 203 | 3013 | 290 | 6304 | 1007 | 79085 |
| Middelresultat.... | 10.7 | 158.6 | 15.3 | 331.8 | 53.0 | 4162.4 |
| **Alle 3 Penduler.** | | | | | | |
| Gennemsnit ...... | 14.2 | 357.9 | 17.3 | 525.8 | 49.8 | 3761.2 |

Under Henvisning til Oversigten C Side 453 og til Formlerne Side 456 for $(x)^2$ og $(\tau)^2$ og de deri indgaaende Betegnelser $\lambda$ og $l$ erholdes af alle 19 Stationer

$(a)^2 = 220.9, \quad \lambda = 719.4, \quad (a)^2 = 74.0 \quad$ og $\quad l = 516.7,$

$$(x)^2 = 50.7 \quad \text{og} \quad (\tau)^2 = 69.2 \quad \text{samt}$$
$$(x) = 7.2, \quad (\tau) = 8.3 \quad \text{og} \quad \tau = 0^s.071,$$

som stemmer med den i Slutningen af I anførte Værdi af $(\tau)$, der jo ogsaa var baseret paa den her fundne Værdi 50.7 for $(x)^2$. Til bedre Oversigt over Betydningen af Indførelsen af Fejlene $x$ (eller $\xi$) paa Resultaterne anføres omstaaende Sammenstilling.

| $(a)^2$ | $(x)^2$ | $(\tau)^2$ | $\mu^2$ | $(\tau)$ | $\mu$ | $\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 74.0 | 0 | 86.1 | 61.6 | 9.3 | 7.8 | $0^s.079$ |
| 74.0 | 50.7 | 69.2 | 78.5 | 8.3 | 8.9 | $0^s.071$ |

der viser, hvorledes $(\tau)$ formindskes og $\mu$ forøges ved Indførelsen af $x$, medens $(a)$ forbliver uforandret.

## III.

Men heller ikke den ved Indførelsen af $x$ tilvejebragte Formindskelse af $(\tau)$ er tilstrækkelig. Det vil jo nemlig erindres, at $x$ eller rettere $\xi$ er antaget at variere fra Pendul til andet, og at den anførte Bestemmelse af $(x)$ netop beroer paa denne Egenskab ved $\xi$. Det er imidlertid indlysende, at der foruden den Fejl, der hidrører fra de overførte Tidsangivelser, kan være en anden fælles Fejl paa alle Pendulmaalinger i en Gruppe, og at en saadan gaar ud ikke blot af $a$ og $\alpha$, men ogsaa af $d$ og $\delta$, medens den som varierende fra Gruppe til Gruppe indtræder i $D$ og $\varDelta$ og derigennem i $(\tau)$ og $\mu$. Naar man i den foregaaende Udvikling ombytter $x$ med $x+y$ og $\xi_r$ med $\xi_r+y$, viser det sig, at $x$ og $\xi$ ikke derved forandre Værdi, medens derimod de ovenfor erholdte Værdier for $(\tau)^2$ og $\mu^2$, som vi i denne Sammenhæng ville betegne ved $(\tau_1)^2$ og $\mu_1^2$, skulle henholdsvis formindskes og forøges med $\frac{1}{3}(y)^2$. Man har nemlig med disse Betegnelser

$$\mu_1^2 = \frac{(a)^2}{4} + \frac{(\tau_1)^2}{2} + \frac{(x)^2}{2}$$

og erholder ved Indførelsen af $y$

$$(\tau)^2 = (\tau_1)^2 - \tfrac{1}{3}(y)^2$$

og

$$\mu^2 = \frac{(a)^2}{4} + \frac{(\tau)^2}{2} + \frac{(x)^2}{2} + \frac{(y)^2}{2} = \mu_1^2 + \tfrac{1}{3}(y)^2.$$

Spørgsmaalet er nu, hvorledes man kan bestemme $(y)$. Dette sker ved at bestemme $(\tau)$ uafhængig af Fejlene paa Pendulmaalingerne, idet man ved Bestemmelsen ikke benytter selve disse Maalinger, men de paa dem anbragte Korrektioner for Uhrets Gang. Betegner man nemlig Forskellen mellem Dag- og Natkorrektionen for Gangen ved $\gamma$, har man med de anvendte Betegnelser

$$(1)-2(2)+(3)=\gamma,$$

der giver

$$6(\tau)^2=(\gamma)^2.$$

De hertil svarende Talregninger ere anførte i nedenstaaende 3 Oversigter, der svare til de 3 ved A, B og C betegnede Stationsgrupper.

*A. De 9 Sjællandske Stationer.*

| Nr. | Station. | Uhrkorrektion $\cdot 10^{-7}$. Daggruppe. | Natgruppe. | Differens. | Kvadrat. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aagerup ........ | − 146 | − 146 | 0 | 0 |
| 2 | Tudse .......... | − 171 | − 159 | −12 | 144 |
| 3 | Svinninge....... | − 131 | − 132 | 1 | 1 |
| 4 | Faarevejle ...... | − 166 | − 179 | 13 | 169 |
| 5 | Jyderup ........ | − 126 | − 106 | −20 | 400 |
| 6 | Viskinde........ | − 141 | − 129 | −12 | 144 |
| 7 | Refsnæs ........ | − 101 | − 92 | − 9 | 81 |
| 8 | Kalundborg ..... | − 27 | − 29 | 2 | 4 |
| 9 | Korsør.......... | − 99 | − 68 | −31 | 961 |
| | Sum ........... | −1108 | −1040 | −68 | 1904 |
| | Middelværdi .... | −123.1 | −115.6 | −7.6 | 211.6 |

$$6(\tau)^2 = 211.6; \quad (\tau)^2 = 35.3 = (5.94)^2.$$

*B. De 10 Fyensk-Jydske Stationer.*

| Nr. | Station. | Daggruppe. | Natgruppe. | Differens. | Kvadrat. |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Nyborg ......... | − 106 | − 83 | − 23 | 529 |
| 11 | Ullerslev........ | − 24 | − 19 | − 5 | 25 |
| 12 | Kjerteminde .... | − 51 | − 44 | − 7 | 49 |
| 13 | Marslev......... | − 84 | − 61 | − 23 | 529 |
| 14 | Odense ......... | − 85 | − 72 | − 13 | 169 |
| 15 | Ubberud ....... | − 147 | −111 | − 36 | 1296 |
| 16 | Vissenbjerg ..... | − 88 | − 68 | − 20 | 400 |
| 17 | Fjelsted ........ | − 133 | −110 | − 23 | 529 |
| 18 | Kavslunde ...... | − 159 | −146 | − 13 | 169 |
| 19 | Hansted ........ | − 242 | −209 | − 33 | 1089 |
| | Sum ........... | −1119 | −923 | −196 | 4784 |
| | Middelværdi .... | −111.9 | −92.3 | −19.6 | 478.4 |

$$6(\tau)^2 = 478.4; \quad (\tau)^2 = 79.7 = (8.93)^2.$$

*C. Alle 19 Stationer.*

Summen af samtlige 19 Kvadrater bliver = 6688, altsaa

$$6(\tau)^2 = 352.0; \quad (\tau)^2 = 58.7 = (7.66)^2.$$

Idet nu

$$\tfrac{1}{3}(y)^2 = (\tau_1)^2 - (\tau)^2,$$

sammenfattes Resultaterne i nedenstaaende Oversigt.

| | A. | B. | C. |
|---|---|---|---|
| $(\tau_1)^2$ | $40.5 = (6.4)^2$ | $95.1 = (9.7)^2$ | $69.2 = (8.3)^2$ |
| $(\tau)^2$ | $35.3 = (5.9)^2$ | $79.7 = (8.9)^2$ | $58.7 = (7.7)^2$ |
| $\frac{1}{3}(y)^2$ | $5.2 = (2.3)^2$ | $15.4 = (3.9)^2$ | $10.5 = (3.2)^2$ |

Tilsyneladende ere Afvigelserne mellem A, B og C ret store, men i Virkeligheden ere de mindre end deres Middelfejl og altsaa tilladelige. Holde vi os til den sikreste Bestemmelse, altsaa til C, udvides Sammenstillingen i Slutningen af forrige Art. til nedenstaaende Oversigt over Resultaterne af den foregaaende Udvikling og over den Maade, hvorpaa $(\tau)$ *formindskes* og $\mu$ *forøges* ved Indførelsen af nye tidligere oversete Partielfejl.

| $(a)^2$ | $(x)^2$ | $(y)^2$ | $(\tau)^2$ | $\mu^2$ | $\mu$ | $(\tau)$ | $\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 74.0 | 0 | 0 | 86.1 | 61.6 | 7.8 | 9.3 | $0^s.079$ |
| 74.0 | 50.7 | 0 | 69.2 | 78.5 | 8.9 | 8.3 | $0^s.071$ |
| 74.0 | 50.7 | 31.5 | 58.7 | 89.0 | 9.4 | 7.7 | $0^s.065$ |

## IV.

Indflydelsen af nogle af de Fejlkilder, som ere paaviste i det foregaaende, kan ogsaa bestemmes ved Behandling af Differenser mellem Svingningstiderne, og da en saadan Bestemmelse ikke blot bidrager til at kontrollere den foregaaende Fremstilling, men tillige delvis kan afgive et Udgangspunkt for en videre Udvikling, skulle vi her vise, hvorledes den lader sig gennemføre.

Lad $P$, $Q$ og $R$ være Differenserne mellem to Svingningstider af samme Række for de 3 Penduler Nr. 51, 53 og 55, saa har man med let forstaaelige Betegnelser

$$P = S_{51} - S_{53}, \quad Q = S_{51} - S_{55}, \quad R = S_{55} - S_{53}.$$

Af Fejlene herpaa, som efter Ordenen betegnes ved $p$, $q$ og $r$, udgaar aabenbart alle Partielfejl, som ere fælles for de 3 Penduler i Rækken, altsaa Fejlene, der skyldes Tidsoverføringen og dermed analogt virkende Fejlkilder og som ovenfor svare til Middelfejlene $(\tau)$ og $(y)$. Derimod ville de til $(\alpha)$ og $(\xi)$ svarende Fejlkilder indgaa i $p$, $q$ og $r$, og naar disses Bestemmelse alene sker ved Afvigelser, som træde frem paa den enkelte Station, ville de ikke indeholde andre væsentlige Bestanddele.

Omstaaende Skema giver Værdierne for de til $p$, $q$ og $r$ svarende Middelfejlskvadrater $\{p\}^2$, $\{q\}^2$ og $\{r\}^2$ for de paagældende 19 Stationer, der i Overensstemmelse med Behandlingen i det foregaaende ere samlede i de 3 ved A, B og C betegnede Stationsgrupper. Exempelvis er heri $\{p\}^2$ beregnet af Udtrykket

$$3\{p\}^2 = ((P) - P)^2 + ((P) - P_1)^2 + ((P) - P')^2 + ((P) - P'_1)^2,$$

hvor $(P)$ er Middeltallet af paagældende Stations 4 Værdier for $P$, der ere betegnede ved $P$, $P_1$, $P'$ og $P'_1$, idet man i Analogi med det foregaaende har gjort Adskillelse mellem Stationens 2 Grupper ved Mærke for oven og mellem de to Rækker i en Gruppe ved Mærke for neden. De til $R$ og $Q$ svarende Middelfejlskvadrater $\{r\}^2$ og $\{q\}^2$ ere beregnede paa tilsvarende Maade. Hvad angaar Forbindelsen mellem disse Middelfejl og de tidligere ved $(\alpha)$ og $(\xi)$ betegnede, vil man uden stor Vanskelighed kunne overbevise sig om, at denne er udtrykt ved nedenstaaende Ligninger, hvori man ved Mærkerne 1, 3 og 5 har skelnet mellem de 3 Penduler.

$$\{p\}^2 = (a_1)^2 + (a_3)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_1)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_3)^2;$$
$$\{q\}^2 = (a_1)^2 + (a_5)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_1)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_5)^2;$$
$$\{r\}^2 = (a_3)^2 + (a_5)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_3)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi_5)^2.$$

Naar da $s = \frac{1}{2}\left(\{p\}^2 + \{q\}^2 + \{r\}^2\right)$, erholdes $s = 3(a)^2 + 2(\xi)^2$, idet $(a)^2$ og $(\xi)^2$ ere Gennemsnitsværdierne for henholdsvis de tre $(a)^2$'er og de tre $(\xi)^2$'er, altsaa

$$(a)^2 + \tfrac{2}{3}(\xi)^2 = \tfrac{1}{3}s \quad \text{og} \quad (a)^2 + \tfrac{2}{3}(x)^2 = \tfrac{1}{9}s,$$

hvor $(a)^2$ og $(x)^2$ i Overensstemmelse med det tidligere er lig med $\frac{(a)^2}{3}$ og $\frac{(\xi)^2}{3}$ og svare til Middelpendulet.

*A. De 9 Sjællandske Stationer.*

| Nr. | Station. | $\{p\}^2$ | $\{q\}^2$ | $\{r\}^2$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aagerup . . . . | 57.7 | 588.9 | 748.9 | 697.8 |
| 2 | Tudse . . . . . . . | 1040.9 | 325.6 | 778.0 | 1072 3 |
| 3 | Svinninge . . . . | 314.9 | 210.3 | 862.0 | 693.6 |
| 4 | Faarevejle . . . | 343.0 | 1518.3 | 728.3 | 1294.6 |
| 5 | Jyderup . . . . . | 542.3 | 938.0 | 287.0 | 883.7 |
| 6 | Viskinde . . . . . | 145.0 | 230.0 | 27.0 | 201.0 |
| 7 | Refsnæs . . . . . | 1453.7 | 2521.6 | 746.9 | 2361.1 |
| 8 | Kalundborg . . | 1057.6 | 575.6 | 507.7 | 1070.4 |
| 9 | Korsør . . . . . . | 232.7 | 299 0 | 640.3 | 586.0 |
| | Sum . . . . . . . . | 5187.8 | 7207.3 | 5326.1 | 8860.5 |
| | Gennemsnit . . | 576.4 | 800.8 | 591.8 | 984.5 |

*B. De 10 Fyensk-Jydske Stationer.*

| Nr. | Station. | $\{p\}^2$ | $\{q\}^2$ | $\{r\}^2$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Nyborg . . . . . . | 420.3 | 232.7 | 72.3 | 362.7 |
| 11 | Ullerslev . . . . | 41.6 | 97.0 | 154.9 | 146.7 |
| 12 | Kjerteminde . | 367.3 | 1308.7 | 389.3 | 1032.7 |
| 13 | Marslev . . . . . | 1637.7 | 1841.7 | 280.7 | 1880.0 |
| 14 | Odense . . . . . . | 11.6 | 14.9 | 16.7 | 21.6 |
| 15 | Ubberud . . . . . | 1240.9 | 926.3 | 146.9 | 1157.1 |
| 16 | Vissenbjerg . . | 2166.9 | 361.7 | 1214.9 | 1871.7 |
| 17 | Fjelsted . . . . . | 1301.7 | 294.3 | 1018.9 | 1307.5 |
| 18 | Kavslunde . . . | 20.6 | 1363.7 | 241.7 | 813.0 |
| 19 | Hansted . . . . . | 340.7 | 603.7 | 225.7 | 585.0 |
| | Sum . . . . . . . . | 7549.3 | 7044.7 | 3762.0 | 9178.0 |
| | Gennemsnit . . | 754.9 | 704.5 | 376.2 | 917.8 |

*C. Alle 19 Stationer.*

| | $\{p\}^2$ | $\{q\}^2$ | $\{r\}^2$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| Sum af A . . . . . . . . | 5187.8 | 7207.3 | 5326.1 | 8860.5 |
| Sum af B . . . . . . . . | 7549.3 | 7044.7 | 3762.0 | 9178.0 |
| Totalsum af C . . . . | 12737.1 | 14252.0 | 9088.1 | 18038.5 |
| Gennemsnit . . . . . . . | 670.4 | 750.1 | 478.3 | 949.4. |

Til bedre Vurdering af de Forudsætninger, hvorpaa de forskellige Bestemmelser ere baserede, anføres nedenstaaende Sammenstilling.

| Stationsgruppe. | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $(a)^2$ | $\frac{1}{3}(a)^2$ | $(x)^2$ | $\frac{1}{3}(a)^2+\frac{2}{3}(x)^2$ | $\frac{1}{9}s$ | $(a)^2+\frac{2}{3}(x)^2$ |
| A . . . . . | 117.6 | 102.4 | 22.9 | 117.7 | 109.4 | 132.9 |
| B . . . . | 34.9 | 47.8 | 75.7 | 98.3 | 102.0 | 85.4 |
| C . . . . . | 74.0 | 73.6 | 50.7 | 107.4 | 105.5 | 107.8 |

hvor 1ste Kolonne svarer til Middelpendulet og er taget fra Skemaet øverst Side 354, 2den og 3die Kolonne ere bestemte i Art. II ved de enkelte Penduler og deres Sammenstilling med Middelpendulet, 5te Kolonne er baseret paa Penduldifferenserne i samme Række og beregnet i nærværende Artikel, 4de Kolonne er beregnet af 2den og 3die, og 6te af 1ste og 3die Kolonne.

Afvigelserne mellem A og B i Kolonnerne 1, 2 og 3 ere en Del større end Middelfejlene, der udgør henimod $\frac{2}{3}$ af Tallene i 3die Række og tyde paa forskellige Betingelser ved de to Stationsgrupper. Imidlertid kompensere Afvigelserne i disse 3 Kolonner hinanden, saaledes at Uoverensstemmelsen mellem A og B i 4de og 6te Kolonne er betydelig mindre end Middelfejlen. Overensstemmelsen i 5te Kolonne, der er baseret paa Differenserne $P$, $Q$ og $R$, er særdeles god. Indenfor de forskellige Stationsgrupper er Overensstemmelsen mellem 1ste og 2den Kolonne tilfredsstillende, ligesaa Overensstemmelsen mellem 4de, 5te og 6te Kolonne, og navnlig er dette i stærk fremtrædende Grad Tilfældet ved Stationsgruppen C, hvis Tal ogsaa ere de paalideligste, fordi de ere baserede paa dobbelt saa mange Stationer som Tallene i A og B.

Opløses Middelfejlskvadratet $\mu^2$ i to Bestanddele, hvoraf den ene alene afhænger af Middelfejlen $(\tau)$ paa de overførte Tider, medens den anden $\nu$ indeholder de andre hidtil bestemte partielle Middelfejl, har man

$$\mu^2 = \nu^2 + \tfrac{1}{2}(\tau)^2,$$

hvori man for $\nu^2$ har de tre Udtryk

$$\nu^2 = \tfrac{1}{12}(a)^2 + \tfrac{1}{2}((x)^2 + (y)^2) = \tfrac{1}{36}s + \tfrac{1}{3}(x)^2 + \tfrac{1}{2}(y)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(a)^2 + \tfrac{1}{2}((x)^2 + (y)^2),$$

hvis Talværdier let erholdes af Værdierne i Kolonnerne Nr. 4, 5 og 6 i den nærmest foregaaende Oversigt ved Division med 4 og Addition af $\frac{1}{3}(x)^2 + \frac{1}{2}(y)^2 = 15.4$, $48.3$ og $32.7$, henholdsvis for Stationsgrupperne A, B og C. Resultaterne ere anførte i nedenstaaende Oversigt.

| Stations-gruppe. | $\nu^2$ | | | $\frac{1}{2}(\tau)^2$ | $\mu^2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | | 1. | 2. | 3. | Middelv. |
| A ..... | 44.8 | 42.8 | 48.6 | 17.7 | 62.5 | 60.5 | 66.3 | 63.1 |
| B ..... | 72.9 | 73.8 | 69.7 | 39.9 | 112.8 | 113.7 | 109.6 | 112.0 |
| C ..... | 59.6 | 59.1 | 59.6 | 29.4 | 89.0 | 88.5 | 89.0 | 88.8. |

Det vil ses, at det Bidrag, som Fejlen paa Bestemmelsen af Observationsuhrets Gang herefter yder til Middelfejlskvadratet $\mu^2$, kun udgør Trediedelen af dettes Beløb, hvilket er en betydelig Formindskelse, sammenlignet med de to Bestemmelser i Art. I, hvorefter Forholdsdelen blev henholdsvis to Trediedele og henimod Halvdelen.

Hvis $(a)^2$ nøjagtig var $\frac{1}{3}(a)^2$, vilde der *indenfor* hver af Stationsrækkerne A og B være fuld Overensstemmelse mellem Tallene i de ved 1. og 3. betegnede Kolonner, saaledes som Tilfældet er i Rækken C, hvor Afrundingen helt udsletter den ringe Forskel mellem $(a)^2$ og $\frac{1}{3}(a)^2$. Afvigelserne ere overalt langt mindre end Middelfejlene, og denne gode Overensstemmelse i Forbindelse med, at Tallene i Kolonne 2. stemme saa godt med de tilsvarende i 1. og 3., er et Udtryk for Rigtigheden af de til Grund for Regningerne liggende Forudsætninger, deri indbefattet, at man overalt har regnet med Fejlene som tilfældige, saaledes at Middelværdien af deres Produkter to og to er betragtet som forsvindende.

## V.

Hermed ere de Fejlkilder udtømte, som kunne *vise* sig ved Sammenstilling af Maalinger paa samme Station, medens Fejl, der muligen hidrøre fra Transporten mellem Stationerne, og saadanne, som variere langsomt med Tiden, endnu staa tilbage. Vistnok gøre de sidstnævnte sig ogsaa gældende paa den enkelte Station, men de deraf flydende Uoverensstemmelser kunne i et saa kort Tidsrum som et Døgn, hvori Maalingerne paa en Station gennemføres, maaske ikke træde kendeligt frem, medens de kunne blive forholdsvis meget store under en Kampagne paa flere Maaneder. Hvis man kunde reducere Maalingerne paa de forskellige Stationer til samme Station — vel bedst Tilslutningsstationen, her Kjøbenhavn — vilde man kunne sammenstille dem og bestemme en empirisk Formel for Variationen med Tiden. Naar da denne Formel benyttedes til at korrigere de sammenstillede Værdier, vilde disse efter Korrektionen give Afvigelser fra deres Middeltal, hvorved det hele Middelfejlskvadrat $(\mu)^2$ paa den enkelte Stations korrigerede Svingningstid kunde bestemmes. Da imidlertid Reduktionen til samme Station fordrer nøjagtigt Kendskab til Tyngdeforskellen mellem Stationerne, og da denne Forskel netop er ubekendt, lader Fremgangsmaaden sig ikke ligefrem gennemføre. Derimod kunde man nok løse Problemet gennem en Udjævning, hvori Reduktionselementerne indgaa som ubekendte, saaledes som det nedenfor nærmere skal antydes.

I Kjøbenhavn er der i 1901 udført 3 større Grupper af Tilslutningsmaalinger, hver paa 8 Rækker à 3 Penduler. Udførelsen af disse 3 Grupper falder henholdsvis umiddelbart før, midt i og umiddelbart efter Kampagnen. Samtlige Maalinger baade i og udenfor Kjøbenhavn henføres da til Tidspunktet

Nul, der svarer til den midterste af de ovenfor nævnte Grupper. Henførelsen skeer ved 3 Formler, en for hver af de 3 Penduler, idet der i hver af disse Formler indgaar to indtil videre ubestemte Konstanter; dette giver 6 ubekendte. Tillige indgaar som Elementer de 19 ubekendte Differenser mellem de samtidige Svingningstider i Kjøbenhavn og paa de 19 Stationer udenfor Kjøbenhavn, hvilke Differenser praktisk seet ere ens for alle 3 Penduler. Føjes nu hertil de 3 til Tidspunktet Nul svarende Svingningstider i Kjøbenhavn for de 3 Penduler, erholdes ialt 28 ubekendte Elementer. Hvad angaar Antallet af Betingelsesligninger, bemærkes først, at man for hver Station og for hver af de 3 Tilslutningsgrupper i Kjøbenhavn samler Maalingerne med samme Pendul til et Middeltal og faar altsaa $3 \times (19 + 3) = 66$ saadanne Middeltal. Da hvert af disse Middeltal giver en Betingelsesligning, fordrer Problemets Løsning ad den antydede Vej en Udjævning af 66 Betingelsesligninger med 28 ubekendte Elementer.

Vistnok maa den ovenfor skitserede Udjævning betegnes som den mindst vilkaarlige Løsning, der sikkert ogsaa giver den efter Omstændighederne bedste Bestemmelse baade af selve Svingningstiderne og af deres Nøjagtighed; men det turde dog være et Spørgsmaal, om ikke det hermed forbundne betydelige Regnearbejde vilde staa i Misforhold til den Nøjagtighed, der derved kunde opnaaes; thi Resultatet beroer jo dog paa ret problematiske Hypotheser saavel om Pendulernes Variation med Tiden som om Fejlenes Tilfældighed.

Vi ville derfor i det følgende indskrænke os til en lettere gennemførlig, men ogsaa mere skønsmæssig Vurdering af den opnaaede Nøjagtighed. Herved benytte vi først Tilslutningsmaalingerne i Kjøbenhavn til at fremstille Tilnærmelsesformler for den Del af Fejlen, som varierer med Tiden. Her følger et Sammendrag af de nævnte Tilslutningsmaalinger, der som alt omtalt er udført umiddelbart før, midt i og umiddelbart efter Kampagnen, og som hver bestaaer af 8 Rækker à 3

Penduler, altsaa ækvivalerer en dobbelt Stationsmaaling. Svingningstiderne udtrykte i Enheder af 7de Decimalsted ere for Pendulerne 51, 53 og 55 bestemte ved

$$5079000 + (S)_1, \quad 5077000 + (S)_3 \quad \text{og} \quad 5080000 + (S)_5.$$

| Dato 1901 | $(S)_1$ | Dif. | $(S)_3$ | Dif. | $(S)_5$ | Dif. | Tids-interval. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{15-16}{6}$ | 519 | | 980 | | 1013 | | |
| | | 30 | | 21 | | 28 | 34 |
| $\frac{19-20}{7}$ | 489 | | 959 | | 0985 | | |
| | | 52 | | 56 | | 4 | 39 |
| $\frac{27-28}{8}$ | 437 | | 903 | | 0981 | | |

Heraf udledes for de 3 Penduler efter Ordenen Formlerne

$$K_1 = 1.092\, T + 0.00618\, T^2,$$
$$K_3 = 0.999\, T + 0.01120\, T^2,$$
$$K_5 = 0.488\, T - 0.00988\, T^2,$$

med Gennemsnit:

$$K = 0.860\, T + 0.00250\, T^2,$$

hvorved Maalingerne reduceres til 20de Juli, idet $T$ angiver Antal Dage efter dette Tidspunkt, og $K$ er udtrykt i Enheder af 7de Decimalsted. Nedenstaaende Oversigt giver de af disse Formler beregnede Korrektioner for de forskellige Stationer, hvis Resultater derved henføres til Tidspunktet Nul (20de Juli).

| Nr. | Station. | Dato 1901 | $T$ | Korrektion $K$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 51 | 53 | 55 |
| 1 | Aagerup ....... | 21/6 | −29 | −26 | −20 | −22 |
| 2 | Tudse ......... | 26/6 | −24 | −23 | −18 | −17 |
| 3 | Svinninge ...... | 28/6 | −22 | −21 | −17 | −16 |
| 4 | Faarevejle ..... | 30/6 | −20 | −19 | −16 | −14 |
| 5 | Jyderup ....... | 3/7 | −17 | −17 | −14 | −11 |
| 6 | Viskinde ....... | 5/7 | −15 | −15 | −13 | −10 |
| 7 | Refsnæs ....... | 7/7 | −13 | −13 | −11 | − 8 |
| 8 | Kalundborg .... | 10/7 | −10 | −10 | − 9 | − 6 |
| 9 | Korsør ......... | 13/7 | − 7 | − 7 | − 7 | − 4 |

| Nr. | Station. | Dato 1901 | $T$ | Korrektion $K$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 51 | 53 | 55 |
| 10 | Nyborg ........ | $^{25}/_{7}$ | + 5 | + 6 | + 5 | +2 |
| 11 | Ullerslev ...... | $^{27}/_{7}$ | + 7 | + 8 | + 8 | +3 |
| 12 | Kjerteminde ... | $^{31}/_{7}$ | +11 | +12 | +12 | +4 |
| 13 | Marslev ........ | $^{2}/_{8}$ | +13 | +15 | +15 | +5 |
| 14 | Odense ........ | $^{3}/_{8}$ | +14 | +16 | +16 | +5 |
| 15 | Ubberud ....... | $^{7}/_{8}$ | +18 | +22 | +22 | +6 |
| 16 | Vissenbjerg .... | $^{9}/_{8}$ | +20 | +24 | +25 | +6 |
| 17 | Fjelsted ....... | $^{10}/_{8}$ | +21 | +26 | +26 | +6 |
| 18 | Kavslunde ..... | $^{14}/_{8}$ | +25 | +31 | +32 | +6 |
| 19 | Hansted ....... | $^{17}/_{8}$ | +28 | +35 | +37 | +6 |

Efter Anbringelsen af Korrektionen $K$, den saakaldte Kontraktionskorrektion, erholdes nedenstaaende Oversigt over Stationsresultaterne for *hvert* af de 3 Penduler, saavel for selve Svingningstiderne som for deres Forskel fra de tilsvarende samtidige Svingningstider i Kjøbenhavn. Enheden er 7de Decimalsted af Stjernetidssekunden, og de 3 Middelsvingningstider paa Stationen ere betegnede ved

$$5079000 + (S)_1, \quad 5077000 + (S)_3 \quad \text{og} \quad 5080000 + (S)_5.$$

| Nr. | Station. | $(S)_1$ | $(S)_3$ | $(S)_5$ | **Forskel fra Kjøbenhavn** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | (51) | (53) | (55) | Middelværdi. |
| | Kjøbenhavn . | 489 | 959 | 985 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | Aagerup ..... | 455 | 947 | 946 | +34 | +12 | +39 | +28 |
| 2 | Tudse ....... | 445 | 922 | 928 | +44 | +37 | +57 | +46 |
| 3 | Svinninge ... | 403 | 886 | 926 | +86 | +73 | +59 | +73 |
| 4 | Faarevejle ... | 407 | 880 | 899 | +82 | +79 | +86 | +82 |
| 5 | Jyderup ..... | 468 | 934 | 905 | +21 | +25 | +80 | +42 |
| 6 | Viskinde .... | 451 | 917 | 947 | +38 | +42 | +38 | +39 |
| 7 | Refsnæs ..... | 451 | 904 | 957 | +38 | +55 | +28 | +40 |
| 8 | Kalundborg .. | 473 | 940 | 936 | +16 | +19 | +49 | +28 |
| 9 | Korsør ...... | 511 | 964 | 1005 | —22 | — 5 | —20 | —16 |
| 10 | Nyborg ...... | 517 | 965 | 1029 | —28 | — 6 | —44 | —26 |
| 11 | Ullerslev .... | 523 | 1012 | 1013 | —34 | —53 | —28 | —38 |
| 12 | Kjerteminde . | 509 | 984 | 1002 | —20 | —25 | —17 | —21 |
| 13 | Marslev ..... | 484 | 975 | 994 | + 5 | —16 | — 9 | — 7 |
| 14 | Odense ..... | 463 | 950 | 950 | +26 | + 9 | +35 | +23 |
| 15 | Ubberud .... | 446 | 965 | 953 | +43 | — 6 | +32 | +23 |
| 16 | Vissenbjerg .. | 515 | 971 | 996 | —26 | —12 | —11 | —16 |
| 17 | Fjelsted ..... | 449 | 912 | 943 | +40 | +47 | +42 | +43 |
| 18 | Kavslunde ... | 449 | 913 | 934 | +40 | +46 | +51 | +46 |
| 19 | Hansted ..... | 423 | 916 | 902 | +66 | +43 | +83 | +64 |
| | Sum ........ | 8842 | 17857 | 18165 | 449 | 364 | 550 | 453 |
| | Gennemsnit . | 465.4 | 939.8 | 956.1 | 23.6 | 19.2 | 28.9 | 23.9 |

Hvis der ingen Fejl var, maatte de 3 første i samme Række under Overskriften „Forskel fra Kjøbenhavn" opførte Tal være ens. Fejlene bevirke, at disse Tal blive forskellige, og betegner man deres Afvigelser fra det i samme Række opførte Middeltal ved $v_1$, $v_3$ og $v_5$ samt den til $v$'erne svarende Middelfejl ved $(v)$, haves

$$2(v)^2 = v_1^2 + v_3^2 + v_5^2.$$

Nedenstaaende Oversigt indeholder Regningerne, hvorved $(v)^2$ bestemmes stationsvis.

| Nr. | Station. | $v_1$ | $v_3$ | $v_5$ | $v^2_1$ | $v^2_3$ | $v^2_5$ | $2(v)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aagerup..... | − 6 | +16 | −11 | 36 | 256 | 121 | 413 |
| 2 | Tudse....... | + 2 | + 9 | −11 | 4 | 81 | 121 | 206 |
| 3 | Svinninge ... | −13 | 0 | +14 | 169 | 0 | 196 | 365 |
| 4 | Faarevejle... | 0 | + 3 | − 4 | 0 | 9 | 16 | 25 |
| 5 | Jyderup ..... | +21 | +17 | −38 | 441 | 289 | 1444 | 2174 |
| 6 | Viskinde .... | + 1 | − 3 | + 1 | 1 | 9 | 1 | 11 |
| 7 | Refsnæs..... | + 2 | −15 | +12 | 4 | 225 | 144 | 373 |
| 8 | Kalundborg.. | +12 | + 9 | −21 | 144 | 81 | 441 | 666 |
| 9 | Korsør ...... | + 6 | −11 | + 4 | 36 | 121 | 16 | 173 |
| 10 | Nyborg...... | + 2 | −20 | +18 | 4 | 400 | 324 | 728 |
| 11 | Ullerslev .... | − 4 | +15 | −10 | 16 | 225 | 100 | 341 |
| 12 | Kjerteminde . | − 1 | + 4 | − 4 | 1 | 16 | 16 | 33 |
| 13 | Marslev ..... | −12 | + 9 | + 2 | 144 | 81 | 4 | 229 |
| 14 | Odense ..... | − 3 | +14 | −12 | 9 | 196 | 144 | 349 |
| 15 | Ubberud .... | −20 | +29 | − 9 | 400 | 841 | 81 | 1322 |
| 16 | Vissenbjerg.. | +10 | − 4 | − 5 | 100 | 16 | 25 | 141 |
| 17 | Fjelsted ..... | + 3 | − 4 | + 1 | 9 | 16 | 1 | 26 |
| 18 | Kavslunde... | + 6 | 0 | − 5 | 36 | 0 | 25 | 61 |
| 19 | Hansted..... | − 2 | +21 | −19 | 4 | 441 | 361 | 806 |
| | Sum... | .... | .... | .... | ... | ... | ... | 8442. |

Heraf fremgaar af de 3 ved A, B og C betegnede Stationsgrupper for $2(v)^2$ henholdsvis

$$\frac{4406}{9} = 489.6, \quad \frac{4036}{10} = 403.6 \quad \text{og} \quad \frac{8442}{19} = 444.3,$$

og man erholder ved Division med 6 Middelfejlskvadratet for de i sidste Kolonne af Oversigten paa foregaaende Side opførte Middelværdier af „Forskellen fra Kjøbenhavn", altsaa henholdsvis for de 3 Stationsgrupper

81.6, 67.3 og 74.1,

hvilken Bestemmelse dog kun indeholder de Partielfejl, der variere fra Pendul til andet, og ikke dem, der ere fælles for Pendulerne i samme Række eller Gruppe, saaledes som Tilfældet er med de til $(\tau)$ og $(y)$ svarende Fejl. Det er altsaa kun en Del af Middelfejlskvadratet, man her har bestemt, men da denne Del er sammensat af tilfældige Fejl, fordeler den sig paa Stationsresultatet og paa Tilslutningsmaalingerne med henholdsvis 2 og 1 Trediedele af Beløbet; thi en Tilslutningsmaaling er baseret paa dobbelt saa mange enkelte Bestemmelser som et Stationsresultat. Den Del af det her omtalte Middelfejlskvadrat, der falder paa Stationsresultatet, bliver saaledes for Stationsgrupperne A, B og C henholdsvis

54.4, 44.9 og 49.4,

og naar hertil adderes de i Art. III fundne Værdier for $\frac{1}{2}((\tau)^2+(y)^2)$:

25.4, 63.0 og 45.1,

erholdes efter Afrunding

80, 108 og 95,

der vilde være det søgte Middelfejlskvadrat $(\mu)^2$ for en Station, hvis der ikke var andre Fejl end $(\tau)$ og $(y)$, som manglede i $v$'erne. Men det er aabenbart, at de Fejl, som hidrøre fra Kontraktionsformlerne, kun delvis kunne indgaa i $v$'erne, fordi de forskellige Stationer kun ere sammenknyttede ved Tilslutningsmaalinger og ikke ved selve Stationsmaalingerne. Det er derfor ret naturligt, at der ikke er stor Forskel paa disse Resultater og de tidligere af de enkelte Stationer fundne

63, 112 og 89.

Der kan imidlertid ikke være Tvivl om, at de af Tilslutningsmaalingerne bestemte Kontraktionsformler kun afgiver en grov Tilnærmelse til Bestemmelsen af Pendulernes Variation med Tiden, og at derfor Tillægsfejlen, som kommer frem ved Overgangen fra Station til anden, maa blive af langt større Betydning end ovenfor antydet, hvor den i Gennemsnit kun forøger Middelfejlskvadratet med 6 à 7 Enheder. Dette vil ogsaa vise sig ved en anden Fremgangsmaade, som bringer Pendulernes Variation fra Station til anden til at træde stærkere frem, og som vi nu skulle gaa over til at udvikle.

## VI.

Da de i Art. IV omtalte Differenser $P$, $Q$ og $R$ praktisk seet ere uafhængige af Tyngden, vilde de ikke forandre sig fra Station til anden, hvis de vare fejlfri. Deres henholdsvise Værdier fra forskellige Stationer kunne derfor sammenstilles, og deres Middelfejl bestemmes ved Hjælp af Afvigelserne fra de paagældende Middelværdier. Istedenfor at sammenstille de enkelte Værdier af disse Differenser turde det dog være bedre at sammendrage dem stationsvis til Middelværdierne $(P)$, $(Q)$ og $(R)$ og saa sammenstille disse for de forskellige Stationer. Naar man da af denne Sammenstilling udleder Middelfejlskvadraterne $(p)^2$, $(q)^2$ og $(r)^2$, vilde saavel disse som deres halve Sum $(s)$ kun blive en Fjerdedel af de tilsvarende for de enkelte Værdier, altsaa

$$(p)^2 = \tfrac{1}{4}\{p\}^2, \quad (q)^2 = \tfrac{1}{4}\{q\}^2, \quad (r)^2 = \tfrac{1}{4}\{r\}^2 \quad \text{og} \quad (s) = \tfrac{1}{4}s,$$

*hvis* den anbragte Kontraktionskorrektion var et nøjagtigt Udtryk for Pendulernes Variationer i Løbet af Kampagnen.

Da det er de for Kontraktion korrigerede Værdier, der bestemme Stationsresultatet, maa det ogsaa være disse Værdier af $(P)$, $(Q)$ og $(R)$, der benyttes ved Middelfejlsbestemmelsen, og den omtalte Sammenstilling dannes derfor af Oversigten nederst S. 370 ved simpel Subtraktion og anføres omstaaende med Tilføjelsen af en Rubrik for $s = \frac{1}{2}((p)^2 + (q)^2 + (r)^2)$. I Kolonnerne $(P)$, $(Q)$ og $(R)$ ere de to første Cifre kun anførte i Middelværdierne, og Tegnene • og × betyde henholdsvis Addition og Subtraktion af en Enhed paa den Cifferplads, hvor det staar. Værdien ($R$) for Aagerup er saaledes 2999 og ($Q$) for Svinninge 1523. Endvidere betegner en Klamme om Tallet i Rækken „Middelværdi“, at denne er funden ved at dividere Summen med et Tal, der er 1 mindre end Antallet af Addender i Summen. Saaledes er under A

$$(739) = \frac{5913}{8}.$$

*A. De 9 Sjællandske Stationer.*

| Nr. | Station. | ($P$) | ($Q$) | ($R$) | ($s$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Aagerup | 08 | — 91 | ×99 | 412 |
| 2 | Tudse | 23 | — 83 | 06 | 93 |
| 3 | Svinninge | 17 | — •23 | 40 | 997 |
| 4 | Faarevejle | 27 | — 92 | 19 | 19 |
| 5 | Jyderup | 34 | — 37 | ×71 | 2316 |
| 6 | Viskinde | 34 | — 96 | 30 | 133 |
| 7 | Refsnæs | 47 | — •06 | 53 | 973 |
| 8 | Kalundborg | 33 | — 63 | ×96 | 513 |
| 9 | Korsør | 47 | — 94 | 41 | 457 |
| | Sum | 270 | — 785 | 155 | 5913 |
| | Middelværdi | 1530 | —1487 | 3017 | (739) |

*B. De 10 Fyensk-Jydske Stationer.*

| Nr. | Station. | ($P$) | ($Q$) | ($R$) | ($s$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Nyborg | 52 | — •12 | 64 | 1812 |
| 11 | Ullerslev | 11 | — 90 | 01 | 167 |
| 12 | Kjerteminde | 25 | — 93 | 18 | 9 |
| 13 | Marslev | 09 | — •10 | 19 | 221 |
| 14 | Odense | 13 | — 87 | 00 | 177 |
| 15 | Ubberud | ×81 | — •07 | ×88 | 1290 |
| 16 | Vissenbjerg | 44 | — 81 | 25 | 376 |
| 17 | Fjelsted | 37 | — 94 | 31 | 241 |
| 18 | Kavslunde | 36 | — 85 | 21 | 156 |
| 19 | Hansted | 07 | — 79 | ×86 | 646 |
| | Sum | 215 | — 938 | 153 | 5095 |
| | Middelværdi | 1522 | —1494 | 3015 | (566) |

*C. Alle 19 Stationer.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sum A | 270 | — 785 | 155 | 6056 |
| Sum B | 215 | — 938 | 153 | 5236 |
| Sum C | 485 | —1723 | 308 | 11292 |
| Middelværdi | 1526 | —1491 | 3016 | (627) |

Naar de saaledes erholdte Værdier for ($s$) svarende til de 3 Stationsgrupper A, B og C, nemlig

739, 566 og 627,

sammenlignes med Værdierne for $\frac{1}{4}s$, saaledes som de fremgaa af Oversigten S. 364, nemlig

246, 229 og 237,

saa sees det, at Differensen $(s) - \frac{1}{4}s$ overalt bliver positiv og af en ret betydelig Størrelse, nemlig henholdsvis

493, 337 og 390.

Dette tyder paa et betydeligt Tillæg til de i Oversigten S. 366 anførte Værdier for $\mu^2$, men da det kun er $\frac{1}{36}s$ og ikke $\frac{1}{4}s$, der indgaar i $\mu^2$, bliver Tillæget $\frac{1}{9}$ af de sidst opførte Tal, altsaa

55, 37 og 43.

Naar hertil føjes de paagældende Middelværdier for $\mu^2$, der ere opførte i Oversigten S. 366, nemlig

63, 112 og 89,

erholdes

118, 149 og 132.

Hvis man hermed kunde betragte alle Fejlkilder som udtømte, vilde dette være Udtryk for $(\mu)^2$, idet $(\mu)$ betegner den totale Middelfejl paa et Stationsresultat. Det vil dog i alle Tilfælde være tilraadeligt at betragte de sidst anførte Tal som Minimumsværdier, saa at Resultatet af Undersøgelsen bliver, at Middelfejlen paa den fundne Svingningstid for en Station er mindst 11 à 12 Enheder i 7de Decimalsted af Stjernetidssekundet, altsaa

$(\mu) > 11$ à $12$.

## VII.

De hidtil behandlede Svingningstider ere korrigerede for M e d s v i n g n i n g. Hvis man havde undladt denne Korrektion, vilde dette have forøget Middelfejlskvadratet $(\mu)^2$ med $\sigma^2$, hvor $\sigma^2$ lader sig bestemme af de benyttede Værdier for Medsvingningskorrektionen, som ere anførte i nedenstaaende Tableau, tilligemed deres Afvigelser fra Middeltallene svarende til de 3 Stationsgrupper A, B og C.

| Nr. | Station. | Med-svingning. | A og B | | C | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $v$ | $v^2$ | $v$ | $v^2$ |
| 1 | Aagerup ........ | 68 | + 9 | 81 | + 9.2 | 85 |
| 2 | Tudse .......... | 78 | — 1 | 1 | — 0.8 | 1 |
| 3 | Svinninge ....... | 76 | + 1 | 1 | + 1.2 | 1 |
| 4 | Faarevejle....... | 80 | — 3 | 9 | — 2.8 | 8 |
| 5 | Jyderup ......... | 83 | — 6 | 36 | — 5.8 | 34 |
| 6 | Viskinde ........ | 87 | —10 | 100 | — 9.8 | 96 |
| 7 | Refsnæs......... | 76 | + 1 | 1 | + 1.2 | 1 |
| 8 | Kalundborg...... | 84 | — 7 | 49 | — 6.8 | 46 |
| 9 | Korsør .......... | 61 | +16 | 256 | +16.2 | 262 |
| A | Sum ............ | 693 | 0 | 534 | | |
| | Middelværdi ..... | 77 | | (67) | | |
| 10 | Nyborg.......... | 68 | + 9.4 | 88 | + 9.2 | 85 |
| 11 | Ullerslev ........ | 77 | + 0.4 | 0 | + 0.2 | 0 |
| 12 | Kjerteminde ..... | 86 | — 8.6 | 74 | — 8.8 | 77 |
| 13 | Marslev ......... | 80 | — 2.6 | 7 | — 2.8 | 8 |
| 14 | Odense ......... | 72 | + 5.4 | 29 | + 5.2 | 27 |
| 15 | Ubberud ........ | 86 | — 8.6 | 74 | — 8.8 | 77 |
| 16 | Vissenbjerg...... | 71 | + 6.4 | 41 | + 6.2 | 38 |
| 17 | Fjelsted ......... | 78 | — 0.6 | 0 | — 0.8 | 1 |
| 18 | Kavslunde....... | 77 | + 0.4 | 0 | + 0.2 | 1 |
| 19 | Hansted......... | 79 | — 1.6 | 3 | — 1.8 | 3 |
| B | Sum ............ | 774 | 0.0 | 316 | | |
| | Middelværdi ..... | 77.4 | | (35.1) | | |
| C | Sum ............ | 1467 | | | — 0.2 | 851 |
| | Middelværdi ..... | 77.2 | | | | (47.3) |

Heri har Klammen om Middelværdien samme Betydning som i forrige Artikel, altsaa f. Ex. $(47.3) = \frac{851}{19-1} = \frac{851}{18}$.

Da det at undlade at tage Hensyn til Medsvingningen er det samme som at tillægge denne en konstant Værdi, lig med Middelværdien, bliver den søgte Størrelse $\sigma$ den til Afvigelserne,

$v$, svarende Middelfejl paa den enkelte Station, og $\sigma^2$ faar altsaa for de 3 ved A, B og C betegnede Tilfælde Værdierne

$$67, \quad 35 \quad \text{og} \quad 47,$$

som adderet til de i forrige Art. bestemte Værdier for $(\mu)^2$

$$118, \quad 149 \quad \text{og} \quad 132$$

giver

$$185, \quad 184 \quad \text{og} \quad 179.$$

Det er altsaa en meget betydelig Forbedring af Nøjagtigheden, som Bestemmelsen af Medsvingningen bevirker, og Betydningen heraf er aabenbart desto større jo mindre variable Pendulerne ere; men selv ved et Apparat med saa store Variationer som vort Wienerapparat udøver Korrektionen for Medsvingning en stor Indflydelse paa Resultaternes Paalidelighed, idet Udeladelsen af denne Korrektion bevirker, at Middelfejlen paa Svingningstiden voxer fra 11 à 12 til 13 à 14 Enheder i 7de Decimalsted af Stjernetidssekunden.

## VIII.

Forinden vi forlade Pendulmaalingerne i 1901, turde der være Anledning til at fremhæve, at den i Art. III ved $\tau$ betegnede Middelfejl svarer til Tidsbestemmelsen, *efter* at den er overført til Stationen og ikke til selve Observatoriets Tidsbestemmelser, hverken de astronomiske eller de paa disse og Observatoriets Uhre støttede Tidsangivelser, der overføres til Stationen. Skal i Ligningen

$$(1) - 2(2) + (3) = \gamma$$

(1), (2) og (3) betegne Fejlene paa Observatoriets Tidsangivelser umiddelbart *før* Overførelsen, maa denne Ligning suppleres med Fejlene hidrørende fra det transportable Uhr paa Pendulstationen, hvortil Tiden overføres, og hvis Uregelmæssigheder ophobe sig i Intervallet mellem Tidsbestemmelserne. Betegnes disse Fejl for Intervallet mellem 1ste og 2den Tidsbestemmelse ved

$u$ og mellem 2den og 3die ved $u'$, omdannes Ligningen til

$$(1) - 2(2) + (3) + u - u' = \gamma,$$

og hvis man lader $(\theta)$ være Middelfejlen paa Tidsangivelserne umiddelbart før Overførelsen og foreløbig betragter $u$ og $u'$ som tilfældige Fejl med Middelfejl $(u)$, har man

$$6(\theta)^2 + 2(u)^2 = (\gamma)^2,$$

som sammenlignet med den tilsvarende Ligning i Art. III giver

$$(\tau)^2 - (\theta)^2 = \tfrac{1}{3}(u)^2,$$

der viser, at $(\theta)$ er mindre end $(\tau)$, hvilket iøvrigt ogsaa er umiddelbart indlysende.

Det er imidlertid ret misligt at betragte $u$ og $u'$ som tilfældige Fejl. Hvis Observationsuhret havde været ophængt en Ugestid eller saa paa Stationen, før det benyttedes til Observation, kunde det maaske nok forsvares; men da Observationerne begynde omtrent 20 Timer efter Ophængningen, have Uregelmæssighederne i Gangen endnu et mere systematisk Forløb. Det er nemlig vistnok en ret almindelig Egenskab ved Penduluhre, at de efter Transport begynde med at gaa for stærkt, hvorefter Gangen efterhaanden aftager, først meget uregelmæssigt, derefter mere regelmæssigt, indtil den endelig bliver tilnærmelsesvis konstant.

Dette Forløb har Premierløjtnant Johansen ogsaa under flere Kampagner iagttaget ved vort Uhr, hvis i Begyndelsen meget uregelmæssige Gang efterhaanden gaar over til at blive regelmæssigt aftagende, saaledes at man i de 24 Timer, hvori Observationerne udføres, kan betragte Gangens Formindskelse som proportional med Tiden. Premierløjtnant Johansen har tillige gjort opmærksom paa, at man kan benytte denne Overensstemmelse i Uhrets Gang paa de forskellige Stationer til at bestemme $u - u'$, idet denne Differens paa det nærmeste bliver ens paa alle Stationer og udtrykkes ved Middelværdien af $\gamma$, som nedenfor betegnes ved $(\gamma)$, og for hvilken Skemaerne i Art. III for Tilfældene A, B og C efter Ordenen giver

$$-7.6, \quad -19.6 \quad \text{og} \quad -13.9.$$

Betegner man da $\gamma - (\gamma)$ ved $v$, har man

$$v = (1) - 2(2) + (3)$$

og

$$(v)^2 = 6(\theta)^2,$$

idet $(v)^2$ er Middelværdien af $v^2$ bestemt ved det bekendte Udtryk

$$(v)^2 = \frac{[v^2]}{n-1},$$

hvor $n-1$ her har Værdierne

$$8, \quad 9 \quad \text{og} \quad 18.$$

De hertil svarende Talværdier ere opførte i nedenstaaende Skema, der er dannet af de tilsvarende i Art. III, og som for $(v)^2$ give

$$\frac{1391}{8} = 173.9, \quad \frac{937}{9} = 104.1 \quad \text{og} \quad \frac{3020}{18} = 167.8$$

og ved Division med 6 for $(\theta)^2$ henholdsvis

$$29.0, \quad 17.4 \quad \text{og} \quad 28.0.$$

| Nr. | Station. | A og B | | C | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $v$ | $v^2$ | $v$ | $v^2$ |
| 1 | Aagerup | + 7.6 | 57.8 | +13.9 | 193.2 |
| 2 | Tudse | — 4 4 | 19.4 | + 1.9 | 3.6 |
| 3 | Svinninge | + 8.6 | 74.0 | +14.9 | 222.0 |
| 4 | Faarevejle | +20.6 | 424.4 | +26.9 | 723.6 |
| 5 | Jyderup | —12.4 | 153.8 | — 6.1 | 37.2 |
| 6 | Viskinde | — 4.4 | 19 4 | + 1.9 | 3.6 |
| 7 | Refsnæs | — 1 4 | 2.0 | + 4.9 | 24.0 |
| 8 | Kalundborg | + 9.6 | 92.2 | +15.9 | 252.8 |
| 9 | Korsør | —23.4 | 547.6 | —17.1 | 292.4 |
| A | Sum | + 0.4 | 1390.6 | | |
| | Middelværdi | 0.0 | (173.8) | | |
| 10 | Nyborg | — 3 4 | 11.6 | — 9.1 | 82.8 |
| 11 | Ullerslev | +14.6 | 207.4 | + 8.9 | 79.2 |
| 12 | Kjerteminde | +12.6 | 158.8 | + 6.9 | 47.6 |
| 13 | Marslev | — 3.4 | 11.6 | — 9.1 | 82.8 |
| 14 | Odense | + 6.6 | 43.6 | + 0.9 | 0.8 |
| 15 | Ubberud | —16.4 | 269.0 | —22.1 | 488.4 |
| 16 | Vissenbjerg | — 0.4 | 0.2 | — 6.1 | 37.2 |
| 17 | Fjelsted | — 3 4 | 11.6 | — 9.1 | 82.8 |
| 18 | Kavslunde | + 6.6 | 43.6 | + 0.9 | 0.8 |
| 19 | Hansted | —13.4 | 179.6 | —19.1 | 364.8 |
| B | Sum | 0.0 | 937.0 | C + 0.1 | 3019.6 |
| | Middelværdi | 0.0 | (104.1) | 0.0 | (167.8) |

Resultaterne fremgaar af nedenstaaende Sammenstilling.

| Stations-gruppe. | $(\tau)^2$ | $(\theta)^2$ | $(\tau)$ | $(\theta)$ | $\tau$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A ....... | 35 3 | 29.0 | 5.9 | 5.4 | $0^s.050$ | $0^s.046$ |
| B ....... | 79.7 | 17.4 | 8.9 | 4.2 | $0^s.076$ | $0^s.036$ |
| C ....... | 58.7 | 28.0 | 7.7 | 5.3 | $0^s.065$ | $0^s.045$ |

De erholdte Værdier for $\theta$ ere for store, thi i dem indgaar Uregelmæssighederne i Observationsuhrets Gangvariationer, der giver sig Udtryk i en Variation af $u-u'$ fra Station til anden. Dertil kommer, at $(\theta)$ svarer til Observatoriets Tidsangivelser umiddelbart før Tidsoverføringen og altsaa indeholder mulige Fejl fra Observatoriets Uhre i Mellemtiden mellem den astronomiske Observation og Tidsoverføringen. Observatoriets relative Tidsangivelser have altsaa en mindre Middelfejl end $0^s.045$, og for dets astronomiske Bestemmelser af Tiden er Middelfejlen endnu mindre. Herved maa imidlertid fastholdes, at en mulig konstant Fejl paa de absolute Bestemmelser udgaar af Udtrykket $(1) - 2(2) + (3)$ og derfor her er ladet ude af Betragtning.

## IX.

Sluttelig skulle vi til Belysning af den saakaldte Kontraktion ved Gradmaalingens Schneiderske Penduler behandle Tilslutningsmaalingerne i Kjøbenhavn i de 6 Aar mellem 1894 og 1900. Disse Maalinger ere udførte paa den tidligere Pendulstation i det østlige Meridiankammer paa Kjøbenhavns Observatorium og forekomme i et Antal af henved 250 enkelte Bestemmelser, som omstaaende ere sammendragne i 11 Grupper efter Tidspunktet for deres Udførelse. Svingningstiderne ere her angivne uden Korrektion for Medsvingning, hvis Værdi for Stationen er $76.10^{-7}$; men Størrelsen af denne Værdi er uden Indflydelse ved den følgende Undersøgelse. Tiden $T$ er angivet i Enheder af 100 Dage, og $T = 0$ svarer til den 14de Juni 1894.

Svingningstiden for Middelpendulet udtrykt i Enheder af 7de Decimalsted betegnes ved $5079000 + S_r$ og svarer til Tiden $T_r$, f. U. og e. U. betyde henholdsvis før og efter Ud-

| $T_r$ | $S_r$ | | $v$ | $S_0 - S_r$ | | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | f. U. | e. U. | | f. U. | e. U. | |
| 0.00 | 702 | 701 | 0.93 | 0 | 0 | 1 |
| 2.84 | 647 | 647 | 0.06 | 55 | 54 | 0 |
| 5.25 | 622 | 619 | 3.00 | 80 | 82 | 9 |
| 6.64 | 593 | 608 | —14.80 | 109 | 93 | 219 |
| 10.39 | 604 | 589 | 15.18 | 98 | 112 | 230 |
| 12.16 | 582 | 584 | — 1.58 | 120 | 117 | 3 |
| 14.91 | 577 | 578 | — 1.22 | 125 | 123 | 1 |
| 17.52 | 596 | 575 | 20.85 | 106 | 126 | 435 |
| 18.93 | 562 | 574 | —12.02 | 140 | 127 | 144 |
| 21.56 | 561 | 573 | —11.57 | 141 | 128 | 134 |
| 23.66 | 573 | 572 | 1.17 | 129 | 129 | 1 |
| | | | | | Sum... | 1177 |

jævningen. Det træder tydeligt frem, at $S_r$ f. U. aftager med Tiden, i Begyndelsen stærkt, senere svagere og svagere, ja paa enkelte Steder slaar Formindskelsen endog om til en Forøgelse, hvilket kan ligge i, at den er bleven saa lille, at de øvrige Fejl have Overvægten. Betegner man den Korrektion, hvorved samtlige Svingningstider reduceres til Tidspunktet Nul, ved $K_r$ og Fejlen paa $S_r$ ved $v_r$, har man Ligningen

$$v_r - v_0 = S_r - S_0 + K_r,$$

hvor $K_r$ er en Funktion af Tiden, saaledes beskaffen, at den bliver Nul for $T$ lig med Nul. Problemet skal altsaa løses ved en Udjævning med 11 Betingelsesligninger, hvori som Elementer indgaar de ubekendte i $K_r$ samt $v_0$, og som kunne skrives

$$\begin{aligned} v_0 &= x \\ v_1 &= S_1 - S_0 + x + K_1 \\ &\vdots \\ v_{10} &= S_{10} - S_0 + x + K_{10}. \end{aligned}$$

Naar der nu spørges om hvilket Udtryk man skal vælge for $K$, saa synes det efter Gangen i Formindskelsen af $K$ nærmest at benytte den exponentielle Funktion

$$K = A(1 - e^{-BT})$$

med de to ubekendte $A$ og $B$. Gennemføres Udjævningen paa dette Grundlag, kommer der til at indgaa 3 Ubekendte i Betingelsesligningerne, og Resultatet bliver

$$K = 130.76(1 - e^{-0.188\,T}),$$

hvorved $K$ udtrykkes i Enheder af 7de Decimalsted. De hertil svarende Værdier af $v$'erne ere anførte ovenfor, og man faar for Middelfejlskvadratet $(\mu)^2$ paa hver af de 11 Værdier

$$(\mu)^2 = \frac{[v^2]}{8} = \frac{1177}{8} = 147,$$

som stemmer forholdsvis godt med den i Slutningen af Art. VI anførte Middelfejl for Stationsresultaterne i 1901, nemlig $(\mu) > 11$ à 12.

Med Hensyn til Valget af Udtrykket for $K$ skal endnu bemærkes, at man nok kunde faa $v$'erne til at blive mindre ved at vælge en Funktion med flere ubestemte Konstanter, ja man vilde jo endogsaa kunne reducere dem alle til Nul ved at indføre 10 saadanne Konstanter; men det vilde være det samme som at gaa ud fra, at alle Observationerne vare fejlfri. For at faa en Korrektionsformel, der kan faa nogen Betydning for Fejlbestemmelsen, maa man begrænse Antallet af Konstanter, saaledes at der bliver et tilbørligt Antal overkomplette Betingelser. Sættes Konstanternes Antal til højst to, vil man neppe kunne finde nogen bedre Kontraktionsformel end den ovenfor fremstillede exponentielle. Der er prøvet forskellige saadanne Formler; men de give alle større

Værdier for $v$'erne og $(\mu)$. Iblandt de undersøgte komme 3 af Oberstløjtnant Momberg angivne, nemlig

$$K = 27.21\sqrt{T}, \quad K = 46.27\,T^{0.295} \quad \text{og} \quad K = 45.61\sqrt{T} - 3.58\,T$$

den exponentielle nærmest, idet de for $(\mu)^2$ give henholdsvis

$$206, \qquad 162 \quad \text{og} \quad 150,$$

hvorved tillige er at bemærke, at den første har det forud for den exponentielle, at den kun indeholder 1 Konstant.

Hvad her er udviklet viser i tilstrækkelig Grad, hvor ubestemt det hele Spørgsmaal om Kontraktionen er. Naar Pendulerne have opnaaet en tilbørlig Alder, synes den regelmæssige Kontraktion ganske forsvindende; medens den uregelmæssige Del, der ved vore Schneider'ske Penduler er meget betydelig, bliver tilbage. Om nu disse uregelmæssige Forandringer i Pendullængden, der sikkert udgør den væsentligste Bestanddel i $(\mu)$, virkelig skulde skyldes Forandringer i Pendulstængernes Elasticitetsforhold, eller om den ikke snarere hidhører fra Mangel paa Fasthed i Forbindelsen mellem Pendulets Dele og da navnlig fra en mangelfuld Befæstigelse af Agatæggene, kan ikke afgøres paa nærværende Tidspunkt. I dette Foraar ere imidlertid Pendulerne ved velvillig Imødekommen af Gehejmeraad Helmert blevne underkastede en Revision af Mekanikeren ved det kgl. preussiske geodætiske Institut, Hr. Fechner, med særligt Hensyn til en Forbedring af den omtalte Befæstigelse, og de til Sommer forestaaende Maalinger ville sandsynligvis kunne give et Bidrag til Besvarelsen af det fremsatte Spørgsmaal.

Naar Tilslutningsmaalingerne i 1901 viser en ret regelmæssig Kontraktion, som endog for Middelpendulets Vedkommende kan sættes proportional med Tiden under den forholdsvis korte Kampagne, saa er dette ikke i Modsigelse med det her anførte; thi i Vinteren 1900—1901 ere Pendulerne som Følge af en ny Konstantbestemmelse blevne underkastede saa store

Varmeforandringer, at det kan have havt en forstyrrende Indflydelse paa deres Elasticitetsforhold. Maalingerne i 1902 tyde ogsaa paa, at den uregelmæssige Del af Kontraktionsfejlen atter har faaet en saa betydelig Overvægt over den regelmæssige Del, at denne sidste ganske forsvinder for en umiddelbar Betragtning.

# SUR L'ERREUR MOYENNE
# DE LA MESURE RELATIVE DE PENDULES
# AVEC L'APPAREIL SCHNEIDER N° 14

PAR

LE GÉNÉRAL ZACHARIAE

RÉSUMÉ DE LA NOTE PRÉCÉDENTE

Après quelques observations préliminaires sur l'appareil et la manière de s'en servir pour les mesures de pendules, on passe, à l'art. I, au traitement du problème. La résultante de toutes les sources d'erreurs est supposée décomposée en deux erreurs partielles, dont l'une, correspondant à l'erreur moyenne $(\tau)$, provient seulement de l'erreur du temps déterminé à l'Observatoire de Copenhague et de la transmission de ce temps à la station, tandis que l'autre, dont l'erreur moyenne est désignée par $(a)$, indique provisoirement le reste des erreurs. Les deux erreurs partielles sont exprimées au moyen des différences de séries $d$ et des différences de groupes $D$, et ces expressions donnent les formules

$$(a)^2 = \tfrac{1}{4}((d)^2 + (d')^2), \quad (\tau)^2 = \tfrac{1}{6}((D)^2 - (a)^2)$$

et

$$\mu^2 = \tfrac{1}{4}(a)^2 + \tfrac{1}{2}(\tau)^2,$$

$(d)^2$ et $(D)^2$ désignant les valeurs moyennes de $d^2$ et $D^2$ et $\mu$ l'erreur moyenne du résultat de la station. Si dans ces formules on introduit les valeurs numériques tirées de 19 stations déterminées dans l'année 1901, on obtient

$$(a)^2 = 74.0, \quad (\tau)^2 = 86.1 \quad \text{et} \quad \mu^2 = 18.5 + 43.1 = 61.6$$

en unités de la septième décimale de seconde du temps sidéral.

A la fin de l'article, on fait observer qu'entre autres choses on a ici négligé une erreur systématique $x$; et l'on

montre comment l'introduction de cette erreur doit changer les résultats, de sorte que $(\tau)$ devient moindre et $\mu$ plus grand que les valeurs obtenues.

Dans l'art. II, on fait le calcul de $x$ par la combinaison des résultats des pendules isolés et ceux du pendule moyen. Celui-ci donnant l'équation

$$6(\tau)^2 + 2(x)^2 = (D)^2 - (a)^2 = l,$$

on forme pour les autres pendules trois équations analogues, dont la valeur moyenne,

$$6(\tau)^2 + 6(x)^2 = (\varDelta)^2 - (a)^2 = \lambda,$$

combinée à la première, donne

$$(x)^2 = \tfrac{1}{4}(\lambda - l) = 50.7 \quad \text{et} \quad (\tau)^2 = \tfrac{1}{4}(l - \tfrac{1}{3}\lambda) = 69.2.$$

Or, ayant

$$\mu^2 = \tfrac{1}{4}(a)^2 + \tfrac{1}{2}(x)^2 + \tfrac{1}{2}(\tau)^2,$$

les résultats de l'art. I se changent en

$$(a)^2 = 74.0, \quad (\tau)^2 = 69.2 \quad \text{et} \quad \mu^2 = 43.9 + 34.6 = 78.5.$$

L'art. III s'occupe d'une erreur $y$, qui diffère de $\xi$ en ce qu'elle a la même valeur pour les trois pendules de la même série, tandis que $\xi$ varie d'un pendule à l'autre. Cette erreur $y$ produit une diminution ultérieure de $(\tau)^2$ et une augmentation correspondante de $\mu^2$. Désignons les résultats de l'art. précédent par $(\tau_1)$ et $\mu_1$, et nous obtiendrons, en introduisant $y$,

$$(\tau)^2 = (\tau_1)^2 - \tfrac{1}{3}(y)^2 \quad \text{et} \quad \mu^2 = \mu_1{}^2 + \tfrac{1}{3}(y)^2,$$

où $(y)$ se détermine au moyen de l'expression

$$\tfrac{1}{3}(y)^2 = (\tau_1)^2 - (\tau)^2.$$

Ici $(\tau_1)^2$ est connu de l'art. II, et $(\tau)^2$ peut être déterminé indépendamment des erreurs de la mesure des pendules, en se servant, à cet effet, non de ces mesures mêmes, mais des corrections qu'on y a faites pour la marche de l'horloge. Soit $\gamma$ la différence entre les corrections de jour et de nuit sur la durée des oscillations, et l'on obtient

$$(1) - 2(2) + (3) = \gamma,$$

qui donne

$$6(\tau)^2 = (\gamma)^2 = 352,$$

d'où résulte que

$$(\tau)^2 = 58.7, \text{ et, } (\tau_1)^2 \text{ étant } = 69.2,$$

$$\tfrac{1}{3}(y)^2 = 10.5 \quad \text{et} \quad \mu^2 = 78.5 + 10.5 = 89.0.$$

Si l'on désigne par $\tau$ l'erreur moyenne de l'heure transmise correspondant à $(\tau) = \sqrt{58.7} = 7.7$, on obtient

$$\tau = 0.0085\,(\tau) = 0^s.065.$$

Avec cela, les erreurs qui peuvent se montrer à l'examen des mesures de la même station sont épuisées. Cependant, à l'art. IV on s'est encore arrêté à plusieurs de ces erreurs, surtout à celles qui s'introduisent dans les différences $P$, $Q$ et $R$ entre les temps d'oscillation des trois pendules, dont les numéros sont 51, 53 et 55. Désignons par $S$ les temps d'oscillation, et nous aurons

$$P = S_{51} - S_{53}, \quad Q = S_{51} - S_{55} \quad \text{et} \quad R = S_{55} - S_{53}.$$

Si l'on désigne les erreurs moyennes qui correspondent à $P$, $Q$ et $R$ par $\{p\}$, $\{q\}$ et $\{r\}$ et que l'on pose $\frac{1}{2}(\{p\}^2 + \{q\}^2 + \{r\}^2) = s$, les erreurs moyennes désignées ci-dessus par $(a)$ et $(x)$ se rattachent à $s$ par l'équation

$$\tfrac{1}{9}s = (a)^2 + \tfrac{2}{3}(x)^2,$$

qui, par l'introduction des valeurs numériques, donne

$$105.5 = 107.8.$$

Cette concordance doit être considérée comme assez bonne, l'équation ne pouvant donner de contrôle de calcul, mais seulement un contrôle de l'admissibilité des hypothèses sur lesquelles repose le développement. En calculant d'après trois formules différentes, on obtient pour $\mu^2$ les trois valeurs assez concordantes

$$89.0, \ 88.5 \ \text{et} \ 89.0.$$

Dans l'art. V, on parle des erreurs dont la variation est trop lente pour se faire remarquer tant qu'on ne compare que des mesures de la même station, quoique cette variation soit assez grande pour produire des erreurs considérables dans le courant d'une campagne de plusieurs mois. Si l'on pouvait réduire les mesures faites en différentes stations, à une seule et même station — à la station de rattachement par exemple — on pourrait les comparer et arriver à une formule empirique pour la variation avec le temps. En se servant de cette formule pour corriger les valeurs comparées, on aurait, après la correction, des déviations de la valeur moyenne par lesquelles le carré de l'erreur moyenne totale $(\mu)^2$ pourrait être calculé. La réduction à une même station exigeant cependant une connaissance exacte de la différence de pesanteur entre les stations, et cette différence n'étant point connue, devant précisement être déterminée au moyen des mesures de pendules, ce procédé ne saurait mener à bonne fin. Mais on pourrait bien résoudre le problème par un calcul de compensation dans lequel les éléments de réduction entrent comme inconnues, ainsi que nous allons l'indiquer.

A Copenhague, on a, en 1901, fait trois grands groupes de mesures de rattachement, chacun en huit séries à trois pendules. Les mesures de ces trois groupes ont eu lieu immédiatement avant, pendant, et immédiatement après la campagne. Par trois formules, une pour chacun des trois pendules, toutes les mesures exécutées dans le courant de la campagne peuvent être rapportées à la station de Copenhague et à la date du groupe du milieu de cette station, savoir au 20 juillet. Dans chacune de ces formules entrent deux constantes provisoirement indéterminées, ce qui donne six inconnues. Il y entre encore la différence entre les temps d'oscillation simultanés à Copenhague et à la station en question, différence qui, du point de vue pratique, ne varie pas d'un pendule à l'autre. Le nombre de ces différences inconnues est donc de 19. Si l'on y ajoute les trois temps d'oscillation à Copenhague correspondant au temps zéro — 20 juillet — un pour chacun des trois pendules, on obtient en tout 28 éléments inconnus. Quant au nombre des équations de condition, nous ferons d'abord observer que pour chaque station et chacun des trois groupes de rattachement à Copenhague, on prend la moyenne des mesures faites avec le même pendule, ce qui donne en tout $3\,(19+3) = 66$ de ces moyennes. Chacune de celles-ci donnant lieu à une équation de condition, la solution du problème par la voie indiquée exige la solution de 66 équations à 28 inconnues. Une compensation comme celle que nous venons d'esquisser donnera, sans doute, la solution la moins arbitraire, et peut-être aussi la meilleure détermination, et des temps d'oscillation, et de leurs erreurs moyennes. Cependant il se pourrait que les calculs considérables que demanderait un tel procédé fussent en disproportion avec l'augmentation d'exactitude qui en résulterait, car les résultats obtenus dépendraient toujours d'hypothèses assez problématiques, tant sur la variation des pendules que sur la fortuité des erreurs.

On se restreint, par cette raison, à une évaluation plus facile à faire, mais aussi plus estimative, de l'exactitude obtenue. Au moyen des mesures de rattachement seules, on forme trois formules dites de contraction, une pour chaque pendule. A l'aide de ces formules, on corrige toutes les $3 \times 19$ mesures des stations pour la contraction, c'est-à-dire que ces mesures sont réduites à un seul et même point de départ, le 20 juillet. On forme pour chaque station trois déterminations, une pour chaque pendule, de la différence entre le temps d'oscillation à Copenhague et celui de la station. S'il n'y avait pas d'erreurs, ces trois résultats seraient égaux. On en prend la moyenne, et les déviations de celle-ci, $v_1$, $v_3$ et $v_5$, donnent pour l'erreur moyenne correspondante, $(v)$:

$$2(v)^2 = v_1^2 + v_3^2 + v_5^2.$$

En divisant par 6 la moyenne de ces 19 résultats, on obtient

$$\mu'^2 = 74.1,$$

dont un tiers, 24.7, revient à Copenhague, et le reste, 49.4, à la station en question. Cependant, les erreurs communes aux trois pendules n'entrant pas dans les erreurs $v$, $\mu'$ ne représente qu'une erreur partielle dont il faut suppléer le carré par la somme

$$\tfrac{1}{2}((\tau)^2 + (y)^2) = 45.1,$$

et l'on obtient

$$(\mu')^2 = 49.4 + 45.1 = 95 \doteq \mu^2 + 6.$$

Mais les erreurs $v$ n'étant liées entre elles que par les mesures de rattachement et non par celles des stations mêmes, $(\mu')^2$ est évidemment moindre que $(\mu)^2$. — C'est pourquoi à l'art. VI on se sert d'un autre moyen de combinaison, savoir des différences déjà nommées, $P$, $Q$ et $R$, ou plutôt de leurs moyennes par stations, $(P)$, $(Q)$ et $(R)$, qui ne différeraient pas d'une station à l'autre, si elles étaient sans erreurs. On montre que $(s) = \frac{1}{2}((p)^2 + (q)^2 + (r)^2)$, où $(p)$, $(q)$ et $(r)$ sont les erreurs moyennes de $(P)$, $(Q)$ et $(R)$, devrait avoir la même valeur que $\frac{1}{4}s$, si les formules de contraction employées donnaient une expression exacte des variations des pendules pendant la campagne. On montre ensuite qu'il faut au moins augmenter $\mu^2$ de

$$\tfrac{1}{9}((s) - \tfrac{1}{4}s) = 43,$$

de sorte que pour le carré d'erreur moyenne totale du résultat d'une station, on obtient

$$(\mu)^2 > \mu^2 + 43 = 132.$$

L'erreur moyenne est donc plus grande que 11 à 12.

Dans l'art. VII on examine *l'influence du mouvement du support* sur l'exactitude obtenue. La valeur moyenne de celle-ci, calculée d'après les résultats des 19 stations, est de $77.10^{-7}$, et le carré d'erreur moyenne correspondant aux déviations de cette valeur, est égal à 47. Si l'on ne tient pas compte du mouvement du support, le carré d'erreur moyenne s'augmente donc de 47 et devient

$$(\mu)^2 + 47 = 179 = (13.4)^2.$$

L'exactitude des indications de l'heure de l'Observatoire de Copenhague est traitée dans l'art. VIII. Elle n'est pas indiquée par $\tau$, mais par $\theta$, qui est moindre que $\tau$, parce que $\tau$ contient l'erreur partielle $u$, provenant de l'irrégularité de marche de l'horloge à la station. On trouve

$$\theta < 0^s.045,$$

et les indications d'heure de l'Observatoire de Copenhague s'appuyant sur ses horloges et contenant des erreurs qui proviennent de celles-ci, les déterminations astronomiques du temps, qui forment la base des indications d'heure, sont d'une exactitude plus grande que celle qui est indiquée par l'erreur moyenne $\theta$.

A l'art. IX sont traitées les mesures de rattachement à Copenhague entre 1897 et 1900, au nombre d'environ 250, réunies en 11 groupes. Elles montrent une diminution évidente du temps d'oscillation, s'adaptant en moyenne à la formule

$$K = 130.76\,(1 - e^{-0.188\,T}) \cdot 10^{-7},$$

$T$ étant le temps à partir du 14 juin 1894 et exprimé en unités de 100 jours. Cette formule est déterminée par un calcul de compensation de 11 équations de condition à trois éléments inconnus, et donne pour l'erreur moyenne $(\mu)$ d'une des onze valeurs

$$(\mu)^2 = \frac{1177}{8} = 147.$$

La susdite formule exponentielle ne peut être appliquée au-delà de l'année 1900, car, pendant l'hiver de 1901, les constantes de l'appareil furent déterminées de nouveau, et les pendules soumis à de grandes variations de température qui semblent en avoir dérangé les conditions d'élasticité. En 1901, ils se sont montrés comme des pendules neufs avec une contraction considérable, qui, pour le pendule moyen, semblait proportionelle au temps. Cette contraction régulière paraît disparue de nouveau en 1902 et remplacée par une contraction irrégulière, dont la cause serait peut-être une fixation incomplète des arêtes d'agate.